ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΧΑΪΝΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΙΣ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ - ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΑΘΗΝΑ 1993

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τήν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μέ τήν ἔκδοσιν τοῦ Τρίτου Τόμου πιστεύομεν ὅτι καλύπτομεν τήν διδακτέαν ὕλην τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν διά τάς Ἀνωτάτας Σχολάς τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου.

Κατεβλήθη, ὅσο ἦτο δυνατόν, ἰδιαιτέρα προσπάθεια διά τήν ὅλην δομήν τοῦ βιβλίου, ὥστε τοῦτο νά ἔχῃ ἀπόκλισιν καί πρός τά Ἐφηρμοσμένα Μαθηματικά, καθ' ὅσον ἀπευθύνεται κατά κύριον λόγον πρός σπουδαστάς Τεχνολογικοῦ Ἱδρύματος. Ἐξάλλου τό ἀνωτέρω διαφαίνεται σαφῶς καί ἐκ τοῦ περιεχομένου τοῦ βιβλίου.

Ἰδιαιτέραν ἔμφασιν ἐδώσαμεν εἰς τήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν καθώς καί εἰς τάς ἐφαρμογάς αὐτῆς εἰς τήν Δυναμικήν τῶν ρευστῶν, τήν θερμότητα καί τόν Στατικόν ἠλεκτρισμόν.

Θερμάς εὐχαριστίας ἐκφράζω πρός τούς Ἐπίκ. Καθηγητάς κ.κ. Καρανάσιον Σωτήριον, Βλασσόπουλον Βασίλειον, Φελλούρην Ἀργύριον καί τόν βοηθόν κ. Βεληβάσην Νικ. διά τάς γενικάς παρατηρήσεις των ἐπί τοῦ κειμένου.

Ἀθῆναι Φεβρουάριος 1993 — ΙΩΑΝΝΗΣ Θ. ΧΑΪΝΗΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α'

ΘΕΩΡΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΣΕΛΙΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII: ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ (RESIDUES)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX: ΜΕΡΟΜΟΡΦΟΙ ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X: ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΗΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΘΕΩΡΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι [1)]

ΟΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

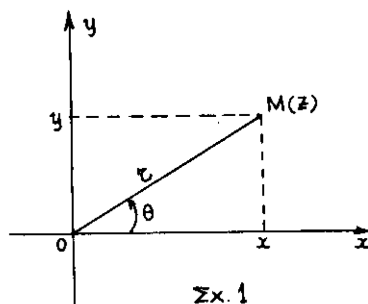
§1. ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

῞Ενας μιγαδικός ἀριθμός z δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν ἀλγεβρικήν μορφήν:

$$z = x + iy \qquad (1)$$

ὅπου x καί y εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί $i = \sqrt{-1}$.

῾Η γεωμετρική του παράστασις εἰς τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ἐπιτυγχάνεται θεωροῦντες τό σημεῖον M ἔχον ὀρθογωνίους συντεταγμένας x καί y. ῾Η ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου καί τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καί κατά συνέπειαν κάθε μιγαδικός ἀριθμός θά παριστᾶ ἕνα σημεῖον τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καί ἀντιστρόφως.



Σχ. 1

Εἰσάγοντες πολικάς συντεταγμένας (τ, θ) μέ πόλον τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων καί πολικόν ἄξονα τόν ἄξονα τῶν x, θά ἔχωμεν:

$$x = \tau\,\text{συν}\,\theta, \quad y = \tau\,\text{ημ}\,\theta \qquad (2)$$

καί οὕτω ἡ ἀλγεβρική μορφή τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z γράφεται ὑπό τήν λεγομένην *πολικήν μορφήν* αὐτοῦ ἤτοι:

$$z = \tau(\text{συν}\,\theta + i\,\text{ημ}\,\theta) \qquad (3)$$

ὅπου $\tau = \sqrt{x^2 + y^2}$.

᾿Εάν $\tau \neq 0$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\text{συν}\,\theta = \frac{x}{\tau}, \quad \text{ημ}\,\theta = \frac{y}{\tau} \qquad (4)$$

῾Ο μή ἀρνητικός ἀριθμός τ καλεῖται ***μέτρον*** ἤ ἀπόλυτος τιμή καί συμβολίζεται μέ $|z|$, ὁ δέ ἀριθμός θ πού ἱκανοποιεῖ τάς ἐξισώσεις (4) καλεῖται ***ὄρισμα*** τοῦ z καί συμβολίζεται μέ $\arg z = \theta$.

1) *Τάς πρώτας §§ τοῦ παρόντος Κεφαλαίου τάς διαπραγματευόμεθα ἐν τάχει.*

Προφανώς διά τό μέτρον ἤ τὴν ἀπόλυτον τιμή του z ἔχομεν:

$$r^2 = |z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z \cdot \bar{z}$$

Συνεπώς: $|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$, ὅπου $\bar{z} = x - iy$, συζυγὴς του z

- Τό ὄρισμα τό διδόμενον ὑπό τῶν (4) προσδιορίζεται κατά ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ 2π. Ἡ τιμή τοῦ ὁρίσματος πού ἱκανοποιεῖ τήν διπλῆν ἀνισότητα

$$-\pi < \theta \leq \pi \qquad (5)$$

καλεῖται ***πρωτεῦον ὄρισμα***.

Τό ὄρισμα τοῦ ἀριθμοῦ μηδέν δέν δύναται νά ὁρισθῇ. Ἀποδεικνύεται ὅτι:

i) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, ἐάν $-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 < +\pi$.

ii) Ἐάν $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n \neq 0$ τότε $\arg(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n + 2k\pi$: k ἀκέραιο

iii) $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$.

- Αἱ ἰδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν καί διά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς ἤτοι:

i) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

iii) $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$.

- Διά τόν μιγαδικόν ἀριθμόν $z = r(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ ἔχομεν:

i) $[r(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)]^n = r^n \cdot (\sigma\upsilon\nu n\theta + i\eta\mu n\theta)$. (Τύπος De Moivre)

ii) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\eta\mu\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

- Συνήθως γράφομεν $x = \mathrm{Re}\, z$ καί $y = \mathrm{Im}\, z$, ὅτε ὁ μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει τήν μορφήν (1) γράφεται: $z = \mathrm{Re}\, z + i \cdot \mathrm{Im}\, z$

Προφανῶς: $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$, $|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$.

Εἶναι δέ, $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

Ἀσκήσεις:

1. Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τοῦ z διά τάς ὁποίας ἔχομεν: $z^5 = -32$. Ἐν συνεχείᾳ δώσατε γεωμετρικήν ἑρμηνείαν τῶν ριζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως.
2. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι ρίζαι:

i) $(1-i)^{1/2}$ ii). $(-1+i)^{1/3}$ iii). $(1-i)^{1/4}$

3. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις $az^2+bz+c=0$, $a\neq 0$ καί ἐν συνεχεία νά ἐφαρμόσετε τό τό ἀποτέλεσμα εἰς τήν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως: $z^2+(i+2)z+3-i=0$.

(Ἀπάντ. Αἱ ρίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως δίδονται ὑπό τοῦ τύπου: $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$).

§ 2 ΒΑΣΙΚΑΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

Κατωτέρω θά δώσωμεν, λίαν συντόμως, ὡρισμένας βασικάς τοπολογικάς ἐννοίας τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}$.

1. **Περιοχαί** Καλοῦμεν ***περιοχήν*** ἤ ἀκριβέστερον ε-***περιοχήν*** τοῦ σημείου $z_0\in\mathbb{C}$ τό σύνολον τῶν σημείων z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τά ὁποῖα πληροῦν τήν ἀνισότητα $|z-z_0|<\varepsilon$, ὅπου ε δοθείς θετικός ἀριθμός. Τό σύνολον $\{z: |z-z_0|<\varepsilon\}$ καλεῖται ***ἀνοικτός δίσκος*** κέντρου z_0 καί ἀκτῖνος ε

2. **Ὁριακά σημεῖα**. Ἕνα σημεῖον z_0 καλεῖται ***ὁριακόν σημεῖον*** ἤ ***σημεῖον συσσωρεύσεως*** ἑνός ὑποσυνόλου S τοῦ $\mathbb{C}$, ἐάν κάθε ε-περιοχή τοῦ z_0 περιέχη ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ S διάφορον τοῦ z_0. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, ἐάν κάθε ε-περιοχή περιέχη ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ S($\neq z_0$) τότε θά περιέχη καί ἄπειρα σημεῖα αὐτοῦ. Ἄς σημειωθῆ ὅτι τό z_0 δύναται ἤ ὄχι ν'ἀνήκη εἰς τό σύνολον S.

3. **Κλειστά σύνολα**. Ἕνα σύνολον S καλεῖται ***κλειστόν***, ἐάν κάθε ὁριακόν του σημεῖον ἀνήκη εἰς αὐτό. Π.χ. Τό σύνολον μέ $|z-z_0|\leq R$, $R>0$ εἶναι κλειστόν.

4. **Φραγμένα σύνολα**. Ἕνα ὑποσύνολον S τοῦ $\mathbb{C}$ θά καλεῖται ***φραγμένον***, ἐάν δύναταί νά εὑρεθῆ μία σταθερά $M>0$ τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν $|z|<M$ διά κάθε $z\in S$. Ἐάν δέν ὑπάρχη τοιαύτη σταθερά $M>0$ πού νά πληροῦται ἡ ἀνωτέρω σχέσις, τότε τό σύνολον καλεῖται ***μή φραγμένον***. Ἕνα κλειστόν καί φραγμένον ὑποσύνολον τοῦ $\mathbb{C}$ καλεῖται ***συμπαγές***.

5. **Ἐσωτερικά σημεῖα**. Ἕνα σημεῖον z_0 καλεῖται ***ἐσωτερικόν*** ἑνός συνόλου S, ἐάν ὑπάρχη μία ε-περιοχή τοῦ z_0 πάντα τά σημεῖα τῆς ὁποί-

ας ἀνήκουν εἰς τό S.

Π.χ. θεωροῦμεν τό σύνολον $|z| \leq 1$. Ἕνα τυχόν σημεῖον z αὐτοῦ θά εἶναι ἐσωτερικόν, ἐάν εἶναι $|z| < 1$, ἐνῶ τά σημεῖα $z = \pm 1$ ἤ $z = \pm i$ ἤ γενικῶς τά σημεῖα $|z| = 1$ δέν εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα αὐτοῦ.

6. **Σύνορον ἑνός συνόλου**: Ἐάν κάθε περιοχή τοῦ σημείου z_0 περιέχῃ σημεῖα ἀνήκοντα καί μή ἀνήκοντα εἰς τό σύνολον S, τότε θά λέγωμεν ὅτι τό z_0 εἶναι ***συνοριακόν σημεῖον*** τοῦ S. Τό σύνολον τῶν συνοριακῶν σημείων τοῦ S καλεῖται ***σύνορον*** αὐτοῦ.
Π.χ. τά σημεῖα τῆς περιφερείας $|z| = 1$ ἀποτελοῦν τό σύνορον τοῦ συνόλου $|z| < 1$. Ὁμοίως τό σύνορον τοῦ συνόλου $|z| \leq 1$ εἶναι ἡ περιφέρεια $|z| = 1$.

7. **Ἐξωτερικά σημεῖα.** Ἐάν ἕνα σημεῖον δέν εἶναι ἐσωτερικόν ἤ συνοριακόν ἑνός συνόλου, τότε τοῦτο θά καλεῖται ***ἐξωτερικόν σημεῖον*** τοῦ συνόλου, ἤ ἰσοδυνάμως: Ἕνα σημεῖον θά εἶναι ***ἐξωτερικόν*** ἑνός συνόλου ἐάν ὑπάρχῃ μία περιοχή αὐτοῦ μή περιέχουσα ἐσωτερικά ἤ συνοριακά σημεῖα τοῦ συνόλου.

8. **Ἀνοικτά σύνολα.** Ἕνα σύνολον θά καλεῖται ***ἀνοικτόν***, ἐάν τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπό τά ἐσωτερικά του σημεῖα καί μόνον αὐτά. Π.χ. τό σύνολον $|z| < 1$ εἶναι ἀνοικτόν.

9. **Θήκη ἑνός συνόλου.** Ἡ ἕνωσις τῶν σημείων ἑνός συνόλου S μετά τῶν συνοριακῶν του σημείων καλεῖται ***θήκη*** τοῦ συνόλου. Οὕτω, ἐάν παραστήσωμεν μέ $\bar{S}$ τήν θήκη τοῦ S καί μέ Γ τό σύνορον αὐτοῦ, τότε θά ἔχωμεν ἐξ ὁρισμοῦ $\bar{S} = S \cup \Gamma$. Προφανῶς, ἐάν τό σύνολον S εἶναι κλειστόν, τότε $\Gamma \subset S$, ὅτε $\bar{S} = S$.

10. **Ἀνοικτόν χωρίον ἤ πεδίον.** Ἕνα σύνολον $G \subset \mathbb{C}$ καλεῖται ***ἀνοικτόν χωρίον*** ἤ ***πεδίον***, ἐάν πληροῦνται αἱ κάτωθι συνθῆκαι: i) Κάθε ση-

μεῖον τοῦ G εἶναι ἐσωτερικόν αὐτοῦ τοῦ συνόλου ii) Δύο σημεῖα τοῦ G δύνανται νά ἑνωθοῦν διά μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς πάντα τά σημεῖα τῆς ὁποίας ἀνήκουν ἐντός τοῦ G.

Δίδοντες τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν τοῦ πεδίου ἡ δευτέρα συνθήκη εἶναι ἡ συνθήκη τῆς συνεκτικότητος τοῦ πεδίου.

<u>Παραδείγματα</u> 1ον/ Τό σύνολον τῶν σημείων $|z|<1$ ἀποτελεῖ ἕνα πεδίον. 2ον/ Ἡ ε-περιοχή τοῦ σημείου z_0, δηλ. ἡ $|z-z_0|<\varepsilon$ ἀποτελεῖ ἕνα πεδίον. 3ον/ Τό σύνολον τῶν σημείων $|z-z_0|\leq 1$ δέν ἀποτελεῖ πεδίον ἐπειδή πάντα τά σημεῖα δέν εἶναι ἐσωτερικά 4ον/. Τό σύνολον τῶν σημείων $|z|\neq 1$ δέν ἀποτελεῖ πεδίον, διότι δέν πληροῦται ἡ δευτέρα συνθήκη. 5ον/ Τό σύνολον τῶν σημείων $|z|<1$ καί $|z-4|<2$ δέν ἀποτελεῖ πεδίον.

11. **<u>Κλειστόν χωρίον</u>**. Ἡ θήκη ἑνός ἀνοικτοῦ χωρίου ἤ πεδίου καλεῖται **κλειστόν χωρίον**. Π.χ. Θεωροῦντες τό πεδίον $|z|<1$ τό ἐξ αὐτοῦ κλειστόν χωρίον εἶναι τό $|z|\leq 1$.

Χρησιμοποιοῦντες κατωτέρω τήν λέξιν "χωρίον" ἄνευ ἐπιθέτου θά ἐννοοῦμεν ἀνοικτόν χωρίον ἤ πεδίον.

12. **<u>Ἀπόστασις</u>**: Ἡ ἀπόστασις $\rho(z_1,z_2)$ δύο σημείων z_1 καί z_2 τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}$ ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται, ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσις πράγματι ὁρίζει μίαν ἀπόστασιν.

13. **<u>Τμῆμα</u>**: Ἐάν z_1, z_2 εἶναι δύο σημεῖα τοῦ $\mathbb{C}$, ὑπό τόν ὅρον ***τμῆμα*** $[z_1,z_2]$ ἐννοοῦμεν τό σύνολον τῶν σημείων τῆς μορφῆς:

$$z=(1-t)\,z_1+t\,z_2$$

ὅπου t πραγματικός ἀριθμός καί $0\leq t\leq 1$. Τά σημεῖα z_1, z_2 καλοῦνται **ἄκρα** τοῦ τμήματος $[z_1,z_2]$.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τά κάτωθι βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα Ι-2-1 (Weierstrass-Bolzano). Κάθε φραγμένον άπειροσύνολον έν $\mathbb{C}$ έχει ένα τουλάχιστον όριακόν σημεῖον.

Θεώρημα Ι-2-2 (Heine-Borel) Έστω ένα συμπαγές σύνολον $\overline{G}$. Υποθέτομεν ότι υπάρχει μία οικογένεια άνοικτῶν δίσκων, πού καλύπτουν τό $\overline{G}$. Τότε τό $\overline{G}$ δύναται νά καλυφθῆ ὑπό ένός πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἐξ αὐτῶν τῶν δίσκων K_z δηλ. ὑπάρχουν σημεῖα z_i, $1 \leq i \leq n$ τοῦ $\overline{G}$ ὥστε νά ἔχωμεν $\overline{G} \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_{z_i}$.

Θεώρημα Ι-2-3 (Cantor. Ἀρχή τοῦ ἐγκιβωτισμοῦ). Ἐάν K_n, $n \geq 1$ εἶναι μία φθίνουσα ἀκολουθία συμπαγῶν καί διαφόρων τοῦ κενοῦ ὑποσυνόλων τοῦ G, τότε ἡ τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ εἶναι ἕνα συμπαγές καί μή κενόν ὑποσύνολον τοῦ G.

§3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εἰς τό Κεφάλαιον VI τοῦ πρώτου τόμου ἐμελετήσαμεν τάς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἠσχολήθημεν κυρίως μέ διαφόρους ἰδιότητας καί κριτήρια συγκλίσεως αὐτῶν. Εἰς τήν παροῦσαν § θά ἀσχοληθῶμεν μέ ἀκολουθίας μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὁρισμός Ι-3-1. *Μία ἀκολουθία $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία τῆς μορφῆς:*

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow z_n \in \mathbb{C}$$

Τά σημεῖα (οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί) $z_1, z_2, \dots z_n, \dots$ καλοῦνται ὅροι τῆς ἀκολουθίας· εἰδικώτερον τό σημεῖον z_n καλεῖται ***n-στός*** ἤ ***γενικός ὅρος*** τῆς ἀκολουθίας $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Παντοῦ κατωτέρω μέ $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ἤ $\{z_n\}$, $n \geq 1$ ἤ ἁπλῶς μέ $\{z_n\}$ θά συμβολίζωμεν μίαν ἀκολουθίαν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

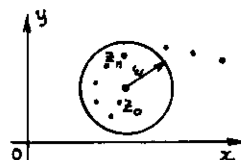
Ὁρισμός Ι-3-2. *Λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$* ***συγκλίνει πρός τόν μιγαδικόν ἀριθμόν*** z_0, ***ἄλλως τείνει πρός τόν*** z_0 ***καί γράφομεν*** $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ ***ἤ*** $z_n \longrightarrow z_0$, $n \uparrow +\infty$, ***τότε καί μόνον τότε, ἐάν διά κάθε*** $\varepsilon > 0$ ***ὑπάρχει εἷς ἀκέραιος*** $N = N(\varepsilon)$ ***τοιοῦτος, ὥστε διά*** $n > N(\varepsilon)$ ***νά ἰσχύη***: $|z_n - z_0| < \varepsilon$

Ὁ z_0 καλεῖται ***ὅριον*** ἤ ***ὁριακόν σημεῖον*** τῆς $\{z_n\}$.

Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω, ὁ z_0 θά εἶναι τό ὅριον τῆς ἀκολουθίας $\{z_n\}$, $n \geq 1$

ἐάν κάθε περιοχή τοῦ z_0 περιέχη τελικῶς πάντας τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\{z_n\}$.

Γεωμετρικῶς αὐτό σημαίνει, ὅτι ὅλα τά σημεῖα $z_n, n>N$ κεῖνται εἰς τό ἐσωτερικόν ἑνός κύκλου κέντρου z_0 καί ἀκτῖνος ε, ὅπως δεικνύεται εἰς τό ἔναντι σχῆμα.



Ἐάν $z_0=0$, τότε ἡ $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ καλεῖται **μηδενική** ἀκολουθία. Οὕτω, π.χ., ἡ ἀκολουθία $z_n=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ εἶναι μία μηδενική ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὅταν μία ἀκολουθία δέν συγκλίνη ἐν $\mathbb{C}$, θά λέγωμεν ὅτι **ἀποκλίνει**.

Ὁρισμός I-3-3. *Μία ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν* $\{z_n\}, n\geq 1$ *θά λέγωμεν ὅτι εἶναι ἀκολουθία τοῦ* Cauchy *ἤ βασική ἀκολουθία, ἐάν διά κάθε* $\varepsilon>0$ *ὑπάρχη εἷς ἀκέραιος* $N=N(\varepsilon)$ *τοιοῦτος, ὥστε* $|z_n-z_m|<\varepsilon$ *διά* $n,m>N(\varepsilon)$. *ἤ ἰσοδυνάμως* $|z_n-z_{n+k}|<\varepsilon$ *διά* $n>N(\varepsilon)$ *καί* $k=1,2,3,\ldots$

Ὁρισμός I-3-4. *Μία ἀκολουθία* $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ *καλεῖται φραγμένη, ἀκριβέστερον ἀπολύτως φραγμένη, τότε καί μόνον τότε, ἄν ὑπάρχη θετικός ἀριθμός* M *τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε* $n\in\mathbb{N}$ *νά ἰσχύη:* $|z_n|\leqq M$.

Γεωμετρικῶς αὐτό σημαίνει ὅτι πάντες οἱ ὅροι τῆς φραγμένης ἀκολουθίας $\{z_n\}$ κεῖνται ἐντός ἑνός κύκλου μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἀκτῖνα M.

Πρότασις I-3-1. Ἐάν $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ εἶναι μία συγκλίνουσα ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Θεώρημα I-3-1. (Bolzano-Weierstrass). Κάθε φραγμένη ἀκολουθία $\{z_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἕνα τουλάχιστον ὁριακόν σημεῖον.

- Ὁ ὁρισμός τῆς συγκλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας μέ μιγαδικούς ὅρους εἶναι «τυπικῶς» ὁ αὐτός ὅπως καί δι' ἀκολουθίας μέ πραγματικούς ὅρους. Ἑπομένως οἱ γνωστοί κανόνες ὑπολογισμοῦ τῶν ὁρίων διά πραγματικάς ἀκολουθίας ἰσχύουν καί ἐνταῦθα, ἤτοι:

Ἐάν, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ καί $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=w_0$, τότε ἰσχύουν:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n\pm w_n)=z_0\pm w_0=\lim\limits_{n\to\infty} z_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} w_n$

β) $\lim_{n\to\infty} k z_n = k z_0 = k \cdot \lim_{n\to\infty} z_n$, ὅπου k τυχὼν σταθερὸς μιγαδ. ἀριθμός.

γ) $\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0 = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$.

δ) $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0} = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}$, ὅταν $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0 \neq 0$, $w_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Πρότασις I-3-2. Ἐάν $z_n = x_n + i\cdot y_n$, $n\in\mathbb{N}$ εἶναι μία ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί $z_0 = x_0 + i y_0$, τότε αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

i) $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ καί $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$

Ἀπόδειξις: i) $\Longrightarrow$ ii). Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{z_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ ἔχει ὅριον τό z_0, τότε, συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν I-3-3 ἔχομεν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διά $n > N$ νά ἔχωμεν: $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Ἀλλά: $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ καί ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τάς σχέσεις.

$$|x_n - x_0| \leqq |z_n - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leqq |z_n - z_0| \qquad (1)$$

καί

$$|z_n - z_0| \leqq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$|x_n - x_0| \leqq |z_n - z_0| < \varepsilon, \quad |y_n - y_0| \leqq |z_n - z_0| < \varepsilon \text{ διά κάθε } n > N.$$

ἤτοι:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{καί} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

ii) $\Longrightarrow$ i). Ἔστω $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ καί $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, τότε διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διά $n > N$ νά ἔχωμεν:

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

Τότε ὅμως, λόγῳ καί τῆς (2) ἔχομεν:

$$|z_n - z_0| \leqq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{διά κάθε } n > N,$$

ἤτοι:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

Πρότασις I-3-3 (Κριτήριον τοῦ Cauchy). Ἵνα μία ἀκολουθία $\{z_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ εἶναι συγκλίνουσα, πρέπει καί ἀρκεῖ αὕτη νά εἶναι μία ἀκολουθία τοῦ Cauchy (βασική ἀκολουθία).

Ἀπόδειξις: Τό ὅτι πᾶσα συγκλίνουσα ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι

βασική, ἕπεται ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως καί τοῦ κριτηρίου τοῦ Cauchy δι' ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν (βλ. Θεώρημα VII-2-1, Τόμος I, σελίς 232).

<u>Ἀντιστρόφως</u> Ἔστω $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ μία ἀκολουθία Cauchy (βασική ἀκολουθία) μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὅπου $z_n = x_n + i y_n$. $(n=1,2,\ldots)$. Τότε συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν I-3-3, ἔχομεν: διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἕνας ἀκέραιος $N=N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε $n>N$ καί $m>N$ νά ἰσχύῃ:

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \qquad (1)$$

Ἔχομεν ὅμως:

$$|x_n - x_m| \leqq |z_n - z_m| \quad \text{καί} \quad |y_n - y_m| \leqq |z_n - z_m|$$

ὁπότε, λόγῳ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{καί} \quad |y_n - y_m| < \varepsilon$$

διά κάθε $n>N$ καί $m>N$, ἤτοι αἱ $\{x_n\}, n\in\mathbb{N}$, $\{y_n\}, n\in\mathbb{N}$ εἶναι ἀκολουθίαι Cauchy πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ὡς τοιαῦται συγκλίνουν, ἔστω δέ $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ καί $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Τότε ὅμως, συμφώνως πρός τήν πρότασιν I-1-2, ἡ ἀκολουθία $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ συγκλίνει εἰς τόν μιγαδικόν ἀριθμόν $z_0 = x_0 + i y_0$.

<u>Τό ἐπ' ἄπειρον σημεῖον (∞) τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.</u>

Ἄς θεωρήσωμεν μίαν ἀκολουθίαν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\{z_n\}, n\geq 1$ τοιαύτη, ὥστε διά κάθε θετικόν ἀριθμόν $M>0$ νά ὑπάρχῃ ἕνας ἀκέραιος N τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν $|z_n| > M$ διά $n \geq N$. Αὐτή ἡ εἰδική περίπτωσις τῆς ἀπολύτως αὐξούσης ἄνευ φράγματος ἀκολουθίας δημιουργεῖ ὡρισμένας δυσχερείας. Ἀπαλλασσόμεθα ἀπό αὐτάς τάς δυσχερείας διά τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z=\infty$. Ὑποθέτοντες ὅτι <u>κάθε ἄνευ φράγματος, ἀπολύτως αὔξουσα ἀκολουθία συγκλίνει πρός τόν μιγαδικόν ἀριθμόν</u> ∞, διά τόν ὁποῖον λέγομεν εἰς τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ὅτι ἀντιστοιχεῖ <u>τό ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτοῦ</u>.

Οὕτω εἰσάγεται καί ἡ ἔννοια τοῦ <u>ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἀποτελουμένου ἀπό τό σύνηθες μιγαδικόν ἐπίπεδον καί ἑνός εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημείου</u> (δηλ. <u>τό σημεῖον</u> $z=\infty$).

Ἄς σημειωθῇ ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός ∞ <u>δέν εἶναι ὡρισμένος</u> ἐπειδή τό

πραγματικόν καί τό φανταστικόν μέρος αὐτοῦ δέν εἶναι ὡρισμένα. Ἐπί πλέον οἱ ὅροι μιᾶς ἀπολύτως αὔξουσας ἀκολουθίας τείνουν πρό τό ∞ ἀνεξαρτήτως τῆς διευθύνσεως εἰς τό ἐπεκτεταμένον μιγαδικόν ἐπίπεδον.

Ἐάν μία ἀκολουθία $\{\zeta_n\}$ $n\geq 1$ συγκλίνει πρός τό μηδέν, τότε ἡ ἀκολουθία $z_n=\frac{1}{\zeta_n}$ θά συγκλίνη πρός τό ∞.

Διά τόν μιγαδικόν ἀριθμόν ∞ δεχόμεθα ὅτι:

$\frac{1}{0}=\infty$ καί $\frac{1}{\infty}=0$, $|\infty|=\infty$, $z\cdot\infty=\infty$ ἐάν εἶναι $z\neq 0$, $z\pm\infty=\infty$, $\frac{z}{\infty}=0$ διά $z\neq\infty$, $\frac{\infty}{z}=\infty$ διά $z\neq\infty$, 0 καί $z\cdot\infty=\infty$ διά $z\neq 0$.

Ἡ πρᾶξις $\frac{\infty}{\infty}$ εἶναι ἀπροσδιόριστος μορφή. Ἄς σημειωθῆ ὅτι τό ∞ στερεῖται προσήμου.

Ὁρισμός I-3-5 *Θά λέγωμεν ὅτι μία ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\{z_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, ἔχει ὅριον τό ∞ καί θά γράφωμεν $\lim_{n\to\infty} z_n=\infty$ ἤ $z_n\to\infty$, τότε καί μόνον τότε, ἄν διά κάθε πραγματικόν ἀριθμόν A ὑπάρχει ἀριθμός $N=N(A)$ τοιοῦτος, ὥστε:*

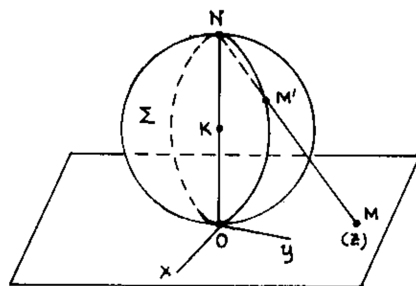
$$|z_n|>A \text{ διά κάθε } n>N$$

Τό ἐξωτερικόν E ἑνός (αὐθαιρέτως μεγάλου) κύκλου μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καλεῖται περιοχή τοῦ ἀπείρου ἐάν τό E θεωρεῖται ὡς ἕνα σύνολον εἰς τό ἐπεκτεταμένον ἐπίπεδον (περιέχει τοῦτο τό ∞).

Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω θά εἶναι $\lim_{n\to\infty} z_n=\infty$ ἐάν, κάθε περιοχή τοῦ ἀπείρου περιέχη πάντας τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\{z_n\}$, ἐκτός ἑνός πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἐξ αὐτῶν.

Ἡ σφαῖρα τοῦ Riemann.

Κατωτέρω θά δείξωμεν ἕναν τρόπον παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὑπό τῶν σημείων μιᾶς σφαίρας. Πρός τοῦτοις θεωροῦμεν μίαν σφαῖραν (Σ) ἐφαπτομένην τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 1). Θεωροῦμεν τήν διάμετρον τῆς σφαίρας τήν διερχομένην διά τοῦ O καί ἡ ὁποία τέμνει



Σχ. 1

ταύτην εἰς τό σημεῖον N (βόρειος) πόλος τῆς σφαίρας. Ἔστω ἤδη ἕνας τυχὼν μιγαδικός ἀριθμός z ἀντιστοιχῶν εἰς τό σημεῖον M τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Φέρομεν τήν εὐθεῖαν NM, ἡ ὁποία τέμνει τήν σφαῖραν εἰς κάποιο σημεῖον, ἔστω M'. Οὕτω κάθε μιγαδικός ἀριθμός ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα σημεῖον τῆς σφαίρας. Ἀντιστρόφως, ἔστω ἕνα τυχόν σημεῖον M' τῆς σφαίρας. Φέρομεν τήν NM' ἡ ὁποία τέμνει τό ἐπίπεδον εἰς τό σημεῖον M καί εἰς τό ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ μιγαδικός ἀριθμός, ἔστω z. Τέλος ὁ πόλος N ἀντιστοιχεῖ ἀμφιμονοσημάντως μέ τό σημεῖον $z=\infty$ τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Οὕτω ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοίχισιν μεταξύ τῶν σημείων τῆς σφαίρας (Σ) καί τῶν σημείων τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἀνωτέρω σφαῖρα καλεῖται ***σφαῖρα* τοῦ Riemann** καί ἡ ἀμφιμονοσήμαντος αὐτη ἀντιστοίχισις μεταξύ τῶν σημείων τῆς σφαίρας τοῦ Riemann καί τῶν σημείων τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καλεῖται ***στερεογραφική προβολή***.

§4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἔστω ὅτι G εἶναι ἕνα τυχόν, μή κενόν, σημειοσύνολον τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}$, ἤτοι $G \subset \mathbb{C}$. Ἐάν τό z συμβολίζῃ ἕνα οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ G, τότε τό z καλεῖται μία ***μιγαδική μεταβλητή*** καί τό G καλεῖται ***πεδίον μεταβολῆς*** τοῦ z.

Ὁρισμός I-4-1. ***Καλοῦμεν*** (μονότιμον) ***συνάρτησιν*** f ***τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς*** z ***κάθε μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τῆς μορφῆς:***

$$G \ni z \xrightarrow{f} w=f(z) \in \mathbb{C}$$

Τό z καλεῖται τότε ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***, τό w ἐξηρτημένη μεταβλητή, τό G πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, τό "f" εἶδος τῆς συναρτήσεως καί τό $f(G)$ πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως.

Τήν ὡς ἄνω συνάρτησιν θά συμβολίζωμεν συντόμως οὕτω:

$$w=f(z)\ ,\ z \in G. \qquad (1)$$

Ἡ παράστασις (1) καλεῖται ὁ ***τύπος τῆς συναρτήσεως*** f, ὁ δίδων τήν

ἐξηρτημένην μεταβλητήν W ἐκ τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς z.

Διά μεταβλητάς ἀνεξαρτήτους ἤ ἐξηρτημένας χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τά γράμματα: z, w, ζ μέ δείκτας ἤ χωρίς δείκτας διά μιγαδικάς μεταβλητάς καί τά $x, y, u, \upsilon, \xi, \eta$ διά πραγματικάς μεταβλητάς.

Ἐάν τά z καί W γραφοῦν ὑπό τήν μορφήν $z=x+iy$, $w=u+i\upsilon$, ἡ (1) ἐπιδέχεται ἐπίσης τήν ἑρμηνείαν ὅτι εἰς τό ζεῦγος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x καί y ἀντιστοιχεῖ μέσω τῆς f ἕνα νέο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν u καί υ. Ἐμφανίζονται οὕτω τά u καί υ ὡς ζεῦγος πραγματικῶν συναρτήσεων τῶν δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καί y. Θέτομεν τότε:

$$u=u(x,y), \quad \upsilon=\upsilon(x,y)$$

καί ἑπομένως ἡ (1) γράφεται

$$f(x+iy) = u(x,y)+i\cdot\upsilon(x,y)$$

Ὥστε μία μιγαδική συνάρτησις $f(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$ παρίσταται πάντοτε οὕτω:

$$f(z) = u(x,y)+i\,\upsilon(x,y)$$

μέ u καί υ πραγματικάς συναρτήσεις ὡρισμένας διά κάθε $z \in G$.

Ἡ συνάρτησις $u(x,y)$ ἀντιστοίχως $\upsilon(x,y)$ καλεῖται τό ***πραγματικόν*** ἀντιστοίχως τό *φανταστικόν μέρος* τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

Παράδειγμα: Ἄς καθορίσωμεν τό πραγματικόν καί φανταστικόν μέρος τῆς συναρτήσεως $f(z)$ μέ τύπον:

$$f(z) = z^2+3z+4.$$

Λύσις: Ἔχομεν:

$$u(x,y)+i\,\upsilon(x,y) = f(z) = (x+iy)^2+3(x+iy)+4$$

ὅθεν:

$$u(x,y) = x^2-y^2+3x+4, \quad \upsilon(x,y) = 2xy+3y.$$

ὁμοίως, ἄν $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i\,2xy$, ἔχομεν:

$$u(x,y) = x^2-y^2, \quad \upsilon(x,y) = 2xy.$$

Σημείωσις: Ἐκτός τῆς ὡς ἄνω ὁρισθείσης μονοτίμου συναρτήσεως ἔχομεν καί τάς λεγομένας *πλειοτίμους* συναρτήσεις, δηλ. ἐκείνας εἰς τάς ὁποίας εἰς ἑκάστην τιμήν τοῦ z ἀντιστοιχοῦν πλείονες τῆς μιᾶς τιμαί τοῦ W, π.χ. ἡ συνάρτησις $w=\arg z$, $z \neq 0$ εἶναι πλειότιμος, ἀκριβέστερον ἀπει-

ρότιμος συνάρτησις, καθ'όσον ἄν θ εἶναι ἕνα ὄρισμα τοῦ z, τότε καί ὁ $\theta+2k\pi$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$ εἶναι ἐπίσης ἕνα ὄρισμα τοῦ z. (βλ. Τόμος Πρῶτος, σελίς 108).

<u>Ἀξιόλογος παρατήρησις</u>. Ἐάν $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$ καί $f(\mathcal{M})\subset\mathbb{C}$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ f εἶναι μία μιγαδική συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς, γράφομεν δέ τότε ὡς τύπον ταύτης τόν:

$$w=f(t) \text{ ἤ } w=w(t)\equiv f(t) \text{ διά κάθε } t\in\mathcal{M} \qquad (1)$$

ἀλλά $w(t)=u(t)+i\,v(t)$, ὅθεν ὁ τύπος (1) ἀναλύεται εἰς:

$$u=u(t),\ v=v(t) \text{ διά κάθε } t\in\mathcal{M} \qquad (2)$$

ὁρίζονται οὕτω δύο νέαι πραγματικαί συναρτήσεις, ἡ $u(t)$, $t\in\mathcal{M}$ καί ἡ $v(t)$, $t\in\mathcal{M}$, καλοῦνται δέ τό ***πραγματικόν*** ἀντιστοίχως τό ***φανταστικόν μέρος*** τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $w(t)$, $t\in\mathcal{M}$.

Δίδομεν τώρα τούς κάτωθι ὁρισμούς:

<u>Ὁρισμός I-4-2</u>. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ μιγαδική συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς* $w=w(t)=u(t)+iv(t)$ *παραγωγίζεται, ἄν ὑπάρχουν αἱ* $u'(t)$, $v'(t)$ *καί ἰσχύη:*

$$w'(t)\equiv(u(t)+i\,v(t))'\underset{\text{ορσ}}{\equiv}u'(t)+iv'(t).$$

<u>Ὁρισμός I-4-3</u>. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ μιγαδική συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς* $w=w(t)=u(t)+i\,v(t)$ *ὁλοκληροῦται, ἄν ὑπάρχουν τά ὁλοκληρώματα* (ἀόριστα ἤ ὡρισμένα) $\int u(t)dt$, $\int v(t)dt$ *καί ἰσχύη:*

$$\int w(t)dt\equiv\int[u(t)+iv(t)]dt\underset{\text{ορσ}}{\equiv}\int u(t)dt+i\int v(t)dt$$

ἀντιστοίχως:

$$\int_a^b w(t)dt\equiv\int_a^b[u(t)+iv(t)]dt\underset{\text{ορσ}}{\equiv}\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt.$$

§5. <u>ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ</u>

<u>Ὁρισμός I-5-1</u>. *Ἔστω* $w=f(z)$ *μία μονότιμος μιγαδική συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕνα σημειοσύνολον* G *τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἐκτός, ἴσως, εἰς τό σημεῖον* $z_0\in G$.

Θά λέγωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ *ἔχει ὅριον τόν* $w_0\in\mathbb{C}$, *ὅταν τό* z *τείνει εἰς*

τό z_0 καί θά γράφωμεν τότε:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \quad \text{ἤ} \quad f(z)\to w_0, \text{ ὅταν } z\to z_0$$

ἐάν διά κάθε $\varepsilon>0$, ὑπάρχη ἕνας ἀριθμός $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύη:

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon \quad \text{διά κάθε } z\in G \text{ μέ } 0<|z-z_0|<\eta .$$

• **Παράδειγμα**: Δείξατε ὅτι:

$$\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = 4i$$

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{z^2+4}{z-2i}$ ὁρίζεται παντοῦ ἐκτός ἀπό τό σημεῖον $z=2i$. Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός δέν ἀπαιτεῖ ὅπως ἡ $f(z)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς τό $z=2i$.

Ὅθεν διά $z\neq 2i$ ἔχομεν:

$$|f(z)-4i|=|z-2i| .$$

Ἐάν λάβωμεν: $0<|z-2i|<\varepsilon=\eta$, ἔχομεν:

$$|f(z)-4i|<\varepsilon \quad \text{διά κάθε } z\in\mathbb{C} \text{ μέ } 0<|z-2i|<\eta .$$

Ὅθεν:

$$\lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} = 4i$$

Ὁρισμός I-5-2. *Ἔστω $f(z)$ μία μιγαδική συνάρτησις ὡρισμένη εἰς ἕνα σημειοσύνολον G τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐκτός, ἴσως εἰς τό σημεῖον z_0 τοῦ G. Θά λέγωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ τείνει εἰς τό ∞, ὅταν τό z τείνει εἰς τό z_0 καί θά γράφωμεν:*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \quad \text{ἤ} \quad f(z)\to\infty, \text{ ὅταν } z\to z_0$$

ἐάν, διά κάθε $A>0$, ὑπάρχη $\eta=\eta(A)>0$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$|f(z)|>A \text{ διά κάθε } z\in G \text{ μέ } 0<|z-z_0|<\eta .$$

Παράδειγμα: $\lim_{z\to 1} \frac{1}{z-1} = \infty$

Ὁρισμός I-5-3 *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ $w=f(z)$ ἔχει ὅριον τό $w_0\in\mathbb{C}$, ὅταν τό z τείνει εἰς τό ∞ καί θά γράφωμεν:*

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \quad \text{ἤ} \quad f(z)\to w_0, \text{ ὅταν } z\to\infty$$

τότε καί μόνον τότε, ἐάν, διά κάθε $\varepsilon>0$, ὑπάρχη πραγματικός ἀριθμός

$M = M(\varepsilon) < +\infty$ *τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύῃ:*

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ διά κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ μέ } |z| > M(\varepsilon).$$

• Ἕνεκα τῆς ἀναλογίας τῶν ὁρισμῶν τῶν ὁρίων δι' ἀκολουθίας καί συναρτήσεις μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς, ἰσχύουν καί ἐν προκειμένῳ οἱ κανόνες τῆς §3, Κεφ. I, ἀρκεῖ μόνον ν' ἀντικατασταθῆ τό σύμβολον $\lim\limits_{n\to\infty}$ διά τοῦ $\lim\limits_{z\to z_0}$ ἀντιστοίχως $\lim\limits_{z\to\infty}$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως συνάγεται εὐκόλως ὅτι, ὅταν μία συνάρτησις $f(z)$ συγκλίνῃ πρός ἕναν μιγαδικόν ἀριθμόν, τότε τό πραγματικόν ἀντιστ. τό φανταστικόν μέρος αὐτῆς συγκλίνει πρός τό πραγματικόν ἀντιστ. τό φανταστικόν μέρος τοῦ ὁρίου της.

Ἀκριβέστερον ἰσχύει ἡ κάτωθι:

<u>**Πρότασις I-5-1**</u> <u>Ἔστω</u> $w = f(z) = u(z) + i\,v(z)$ <u>μία μιγαδική συνάρτησις ὁριζομένη εἰς τό σημειοσύνολον</u> G <u>τοῦ</u> $\mathbb{C}$ <u>ἐκτός, ἴσως εἰς τό σημεῖον</u> z_0 <u>τοῦ</u> G. <u>Τότε αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:</u>

i) $$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i\cdot v_0 \tag{1}$$

ii) $$\lim_{z\to z_0} u(z) = u_0 \quad \text{καί} \quad \lim_{z\to z_0} v(z) = v_0 \tag{2}$$

<u>**Παρατήρησις**</u> Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν τοῦ ὁρίου μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν (βλ. Μαθημ. Ἀνάλ. II, Κεφ II §4) αἱ σχέσεις (2) δύνανται νά γραφοῦν ὡς ἑξῆς

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0\,, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0 \tag{3}$$

καί δηλοῦν, ὅτι: διά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύουν:

$$|u(x,y) - u_0| < \varepsilon \quad \text{καί} \quad |v(x,y) - v_0| < \varepsilon \tag{4}$$

διά κάθε $(x,y) \in G$ μέ $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \eta$.

Τοιουτοτρόπως, δύναταί τις νά χρησιμοποιῆ τάς ἰδιότητας τῶν ὁρίων μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν διά τήν μελέτην τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁρίων συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς.

Ὁρισμός I-5-4. *Ἔστω ἕνα σύνολον $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$ καί $f: G \to \mathbb{C}$ μία μιγαδική συνάρτησις μιγαδικῆς μεταβλητῆς. Θά λέγωμεν ὅτι ἡ f εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον z_0 τότε, καί μόνον τότε, ἐάν ὑπάρχη ἡ ὁριακή τιμή τῆς συναρτήσεως διά $z \to z_0$ καί ἰσοῦται μέ τήν τιμήν $f(z_0)$ τῆς f εἰς τό z_0, ἤτοι ἐάν:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ἰσχύει, ὡς καί διά πραγματικάς συναρτήσεις, ἡ κάτωθι:

Πρότασις I-5-2. Ἐάν $f: G \to \mathbb{C}$ μέ τύπον $w = f(z)$ καί $z_0 \in G$, τότε αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

i) ἡ f εἶναι συνεχής εἰς τό $z_0 \in G$.

ii) διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει θετικός ἀριθμός $\eta = \eta(\varepsilon, z_0)$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύη $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ διά κάθε $z \in G$ μέ $|z - z_0| < \eta$.

Ὁρισμός I-5-5. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ $w = f(z)$, $z \in G$ εἶναι συνεχής ἐν G τότε, καί μόνον τότε, ἄν αὕτη εἶναι συνεχής διά κάθε $z \in G$.*

Πρότασις I-5-3 Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f(z)$, $g(z)$ εἶναι ὡρισμέναι ἐπί τοῦ G καί συνεχεῖς εἰς τό σημεῖον $z_0 \in G$, τότε αἱ συναρτήσεις:

$$f(z) \pm g(z), \quad f(z)g(z), \quad k \cdot f(z) \ (k\text{:σταθερά}), \ \frac{f(z)}{g(z)} \ \text{μέ} \ (g(z_0) \neq 0)$$

εἶναι ἐπίσης συνεχεῖς εἰς τό σημεῖον z_0.

Ἡ ἀπόδειξις, ὡς εὔκολος, ἀφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τόν ἀναγνώστην.

Πρότασις I-5-4. Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής μέ $f(z_0) = w_0$ καί ἐάν $g(w)$ εἶναι συνεχής εἰς τό w_0, τότε ἡ (σύνθετος) συνάρτησις $g(f(z))$ εἶναι συνεχής εἰς τό z_0.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ $g(w)$ εἶναι συνεχής εἰς τό w_0 θά ἔχωμεν ὅτι διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$|g(w) - g(w_0)| < \varepsilon, \quad \text{ὅταν} \quad |w - w_0| < \varepsilon'.$$

Ἐπίσης, ἐφ' ὅσον $f(z)$ εἶναι συνεχής εἰς τό z_0, ὑπάρχει ἕνας θετικός ἀριθμός $\eta = \eta(\varepsilon') = \tilde{\eta}(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon' \quad \text{ὅταν} \quad |z - z_0| < \eta.$$

Θέτοντες $w=f(z)$, λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων:

$$|g(f(z))-g(f(z_0))|<\varepsilon, \text{ ὅταν } |z-z_0|<\eta.$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ $g(f(z))$ εἶναι συνεχὴς εἰς τό z_0.

Πρότασις I-5-5. Ἔστω $f: G \to \mathbb{C}$ μία (μιγαδική) συνάρτησις, συνεχὴς εἰς ἓν σημεῖον $z_0 \in G$. Τότε διά κάθε ἀκολουθίαν $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ τοῦ G μέ $z_n \to z_0$ ἰσχύει.

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$$

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τό z_0, ἔχομεν:

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \text{ διά κάθε } z\in G \text{ μέ } |z-z_0|<\eta.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδή $z_n \to z_0$, ἔχομεν:

$$|z_n-z_0|<\eta \text{ διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν } n \text{ μέ } n>N.$$

Ὅθεν $$|f(z_n)-f(z_0)|<\varepsilon \text{ διά κάθε } n>N$$

ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἡ $f(z_n) \longrightarrow f(z_0)$.

- Ἔχοντες τώρα ὑπ' ὄψιν καί τήν πρότασιν I-4-1, ἀποδεικνύομεν εὐκόλως τήν κάτωθι:

Πρότασις I-5-6. Μία συνάρτησις $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, ὡρισμένη ἐν G, εἶναι τότε, καί μόνον τότε συνεχής, ἐάν τό πραγματικόν καί φανταστικόν μέρος εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις ἐν G.

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ συνάρτησις μέ τύπον:

$$f(z)=\begin{cases} z^2, & \text{ἐάν } z\neq i \\ 0, & \text{ » } z=i \end{cases}$$

Ἐξετάσατε ὡς πρός τήν συνέχειαν ταύτην.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι $\lim_{z\to i} f(z)=i^2=-1$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $f(i)=0$. Ὅθεν, $\lim_{z\to i} f(z)\neq f(i)$ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δέν εἶναι συνεχὴς εἰς τό σημεῖον $z=i$. Δυνάμεθα ὅμως, νά ἐπιτύχωμεν τήν ἄρσιν τῆς ἀσυνεχείας

ἤ ὡς λέγομεν ἔχομεν "**αἱρομένην ἀσυνέχειαν**„ ἐάν εἰς τόν τύπον τῆς συναρτήσεως ἀποδόσωμεν διά $z = i$ εἰς τήν συνάρτησιν τήν τιμήν -1.

Ὁρισμός I-5-6. ***Θά λέγωμεν ὅτι μία συνάρτησις f ὡρισμένη ἐπί τοῦ χωρίου G εἶναι ὁμαλῶς συνεχής ἐν G, τότε καί μόνον τότε, ἄν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη πραγματικός ἀριθμός*** $\eta(\varepsilon) > 0$ (ἐξαρτώμενος μόνον ἐκ τοῦ ε) ***τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε $z_1 \in G$, $z_2 \in G$ ἡ σχέσις***

$$|z_1 - z_2| < \eta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon .$$

Παράδειγμα: Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $f: \Delta \to \mathbb{C}$ μέ τύπον $f(z) = z^2$ καί $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$.

Θά δείξωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχής ἐπί τοῦ Δ.

Πράγματι, διά κάθε z_1 καί z_2 τοῦ Δ ἔχομεν:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |z_1 + z_2| \cdot |z_1 - z_2| \leq 2 \cdot |z_1 - z_2| ,$$

ἐφ' ὅσον $0 < |z| \leq 1$. Ἐάν τώρα λάβωμεν ὡς $\eta = \eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, τότε διά κάθε δύο σημεῖα z_1, z_2 τοῦ Δ οὕτως, ὥστε $|z_1 - z_2| < \eta$ θά ἔχωμεν πάντοτε:

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

Ὅθεν ἡ $f(z) = z^2$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχής ἐπί τοῦ Δ.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τό κάτωθι βασικόν Θεώρημα.

Θεώρημα I-5-1. Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής εἰς ἕνα κλειστόν καί φραγμένον χωρίον $\bar{G}$, τότε αὕτη εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ.

(βλ. ἀπόδειξιν βιβλίον " Complex Analysis with Applications„ ὑπό τοῦ Richard A. Silverman).

§6. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΕΥΟΝΤΟΣ ΟΡΙΣΜΑΤΟΣ arg z

Ἄς θεωρήσωμεν τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}$ τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν $z + |z| \neq 0$ (1). Ἡ σχέσις (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά θεωρήσωμε τό $\mathbb{C}$ ἐφ' ὅσον ἀπό αὐτό ἐξαιρέσομεν τά σημεῖα τά ὁποῖα πληροῦν τήν σχέσιν $z + |z| = 0$ (2)

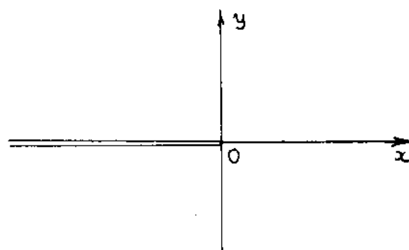
Ἡ δέ σχέσις (2) γράφεται:

$$(x+\sqrt{x^2+y^2}) + iy = 0 \qquad (2')$$

Ἵνα πληροῦται ἡ (2'), ἀρκεῖ $y=0$, ὅτε αὕτη γίνεται:

$$x=-\sqrt{x^2} \leq 0 \qquad (3)$$

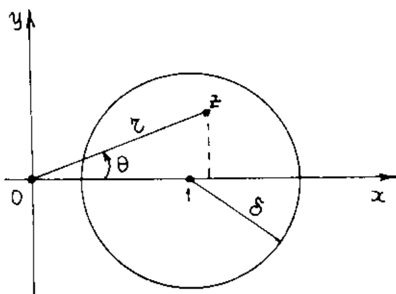
Λόγῳ τῆς (3) ἀρκεῖ νά ἐξαιρέσωμεν ἐκ τοῦ $\mathbb{C}$ τά σημεῖα τοῦ ἀρνητικοῦ ἄξονος συμπεριλαμβανομένου καί τοῦ μηδενός. Τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου πού ἱκανοποιοῦν τήν (1) καλεῖται **πρωτεῦον χωρίον** (Σχ.1).



Σχ. 1

<u>**Θεώρημα I-6-1**</u>. <u>Τό πρωτεῦον ὄρισμα</u> <u>arg z, ὅπου ὁ z κεῖται ἐπί τοῦ πρωτεύοντος χωρίου, εἶναι συνεχής συνάρτησις τοῦ z</u>.

<u>**Ἀπόδειξις**</u>: Κατ' ἀρχάς ἄς λάβωμεν $z_0=1$. Ἔστω δέ z ἕνα σημεῖον ἐντός ἑνός κύκλου ἀκτῖνος $\delta<1$ καί κέντρου $z_0=1$. Ἔστω ἐπί πλέον $\theta=\arg z$, τότε $r\sigma\upsilon\nu\theta=x>1-\delta>0$ (βλ. Σχ. 2). Ὅθεν, $\theta<\frac{\pi}{2}$ καί ἐπί πλέον $|y|<\delta$.
Ἔστω ε ἕνας δοθείς θετικός ἀριθμός. Ἤδη ἵνα ἔχωμεν:



Σχ. 2

$|\arg z-0|=|\theta|\leq \varepsilon\varphi|\theta|=\frac{|y|}{x}<\frac{\delta}{1-\delta}<\varepsilon$, ἀρκεῖ νά λάβωμεν $\delta<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Ὅθεν, ἡ συνάρτησις $\arg z$ εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον $z_0=1$.

Ἔστω ἤδη ἕνα αὐθαίρετον σημεῖον z_0 εἰς τό πρωτεῦον χωρίον· διά δ ἀρκούντως μικρόν καί διά τά z τά ἱκανοποιοῦντα τήν σχέσιν $|z-z_0|<\delta$ δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν $|\arg\frac{z}{z_0}|<\pi-|\arg z_0|$.

Διά τά z τοῦ χωρίου $|z-z_0|<\delta$ τό $\arg z_0+\arg\frac{z}{z_0}$ εἶναι ἕνα τῶν ὁρισμάτων τοῦ z καί ἐπειδή $|\arg\frac{z}{z_0}|+|\arg z_0|<\pi$ ἤ $-\pi<\arg\frac{z}{z_0}+\arg z_0<\pi$, ἕπεται διά τό πρωτεῦον ὄρισμα τοῦ z θά ἔχωμεν:

$$\arg z=\arg z_0+\arg\frac{z}{z_0} \quad (1) \quad (\beta\lambda.\ \sigma\chi\varepsilon\tau.\ \text{Κεφ.I}, \S 1).$$

Ἐάν θέσωμεν $\frac{z}{z_0}=w$, τότε τοῦ $z\to z_0$ τό $w\to 1$.

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν:

$$\lim_{z\to z_0} \arg z = \arg z_0 + \lim_{z\to z_0} \arg \frac{z}{z_0} = \arg z_0 + \lim_{w\to 1} \arg w = \arg z_0 + 0.$$

Ὅθεν, $\lim_{z\to z_0} \arg z = \arg z_0$. Ἡ τελευταία σχέσις ἀποδεικνύει τό θεώρημα.

§7. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἔστω ἡ μονότιμος συνάρτησις $W=f(z)$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό G καί πεδίον τιμῶν τό E. Θεωροῦντες τό z ὡς συνάρτησιν τοῦ W αὐτή ἡ συνάρτησις γράφεται: $z=f^{-1}(w)\equiv\varphi(W)$ καί ἡ ὁποία ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τό E.

Ἡ συνάρτησις $z=\varphi(W)$ καλεῖται **ἀντίστροφος** τῆς δοθείσης. Αὐτή ἐν γένει εἶναι μία *πλειότιμος συνάρτησις* ἀπεικονίζουσα ἕνα σημεῖον W τοῦ E εἰς πλείονα τοῦ ἑνός (ἐνδεχομένως καί ἄπειρα) σημεῖα τοῦ G. Ἄς σημειωθῆ ὅτι ἡ $z=\varphi(W)$ εἶναι μία μονότιμος συνάρτησις, ἐάν καί μόνον ἐάν, διά $z_1\neq z_2$ εἶναι $f(z_1)\neq f(z_2)$. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ $W=f(z)$ καί ἡ $z=\varphi(W)$ δημιουργοῦν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν μεταξύ τῶν πεδίων G καί E.

Παράδειγμα: Ἡ συνάρτησις $W=|z|$ εἶναι μία μονότιμος ἀλλά ἡ ἀντίστροφός της εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις. Πράγματι, διά $W=\rho>0$ ἔχομεν τάς τιμάς τοῦ z πού δίδονται ὑπό τῆς ἐξισώσεως $|z|=\rho$, δηλ. τά σημεῖα τῆς περιφερείας $(0,\rho)$.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:

1. Προσδιορίσατε τά σημεῖα συσσωρεύσεως τῶν κάτωθι συνόλων, ὅπου $n\geq 1$.

   i) $z_n=i^n$ ii) $z_n=\left(\frac{1}{n}\right)\cdot i^n$, iii) $|z|>1,\ 0\leq\arg z<\frac{\pi}{2}$ iv) $z_n=(-1)^n(1+i)(n-1)/n$.

   Ἀπάντ. i) δέν ἔχει ii) Τό 0 iv). $\pm(1+i)$.

2. Εὕρετε τό πραγματικόν καί φανταστικόν μέρος τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

   i) $w=z^3-2z$, ii) $w=yz+iy$, iii) $w=\frac{z}{z^2-1}$

   iv) $w=\frac{z-1}{z+1}$, v) $w=\frac{1}{z^2}$, vi) $w=2z^2-z+1$.

3. Ἐάν $z_1+z_2+z_3=0$ καί $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, τότε τά σημεῖα z_1, z_2, z_3 εἶναι αἱ κορυφαί ἑνός ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τόν μοναδιαῖον κύκλον.

4. Νά γίνη γραφική παράστασις τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ z διά τά ὁποῖα ἔχομεν:

$$\text{i)}\ \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \quad \text{ii)}\ \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 3 \quad \text{iii)}\ \text{Re}z^2 = c \quad \text{iv)}\ \text{Im}z^2 = c \quad -\infty < c < +\infty$$

5. Ἐπί τῆς σφαίρας τοῦ Riemann νά εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες τῶν χωρίων τά ὁποῖα ὁρίζονται ὑπό τῶν ἀκολούθων ἀνισοτήτων:

i) $\text{Im}z > 0$, ii) $\text{Im}z < 0$, iii) $\text{Re}z > 0$

iv) $\text{Re}z < 0$, v) $|z| < 1$, vi) $|z| > 1$

6. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μέ τύπον:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{[\text{Re}(z^2)]^2}{|z^2|}, & \text{ἐάν } z \neq 0 \\ 0, & \text{ἐάν } z = 0 \end{cases}.$$

Δείξατε ὅτι αὕτη εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον $z=0$.

7. Αἱ συναρτήσεις $\dfrac{\text{Re}z}{|z|}$, $\dfrac{z}{|z|}$, $\dfrac{\text{Re}z^2}{|z|^2}$, $\dfrac{z\cdot \text{Re}z}{|z|}$ εἶναι πᾶσαι συνεχεῖς διά $z \neq 0$. Ποῖαι ἀπό αὐτάς δύνανται νά ὁρισθοῦν εἰς τό σημεῖον $z=0$, εἰς τρόπου ὥστε ἡ «ἐπεκτεταμένη» συνάρτησις νά εἶναι συνεχής εἰς τό $z=0$;

8. Δείξατε ὅτι, ἡ συνάρτησις $f(z) = z^2$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχής ἐπί τοῦ πεδίου $|z| < 1$.

9. Δείξατε, ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{z}$ δέν εἶναι ὁμαλῶς συνεχής εἰς τό πεδίον $|z| < 1$.

10. Δοθέντος ὅτι, $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ χρησιμοποιοῦντες πολικήν μορφήν, δείξατε ὅτι $\text{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = |z_1| \cdot |z_2|$, ἐάν καί μόνον ἐάν, $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), ὅπου $\theta_1 = \arg z_1$ καί $\theta_2 = \arg z_2$.

11. Δοθέντος ὅτι $z_1 \cdot z_2 \neq 0$, χρησιμοποιοῦντες τό ἀποτέλεσμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως δείξατε ὅτι:

$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, ἐάν καί μόνον ἐάν, $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, ὅπου $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ καί

$\theta_1 = \arg z_1$, $\theta_2 = \arg z_2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΕΙΡΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§1. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΣΕΙΡΩΝ

Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Τό συμβολικόν ἄθροισμα :

$$z_1 + z_2 + \cdots z_n + \cdots \qquad (1)$$

τό ὁποῖον συμβολίζομεν συντομώτερον ὡς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$
καλεῖται *σειρά* μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ γενικόν ὅρον τό z_n.

Ἕκαστον ἄθροισμα :

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \equiv \sum_{k=1}^{n} z_k$$

καλεῖται *μερικόν ἄθροισμα* τῆς σειρᾶς (1).

Ὁρισμός II-1-1. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει πρός τόν ἀριθμόν S καί θά γράφωμεν $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, τότε καί μόνον τότε, ἄν ἡ ἀκολουθία $\{S_n\}, n\in\mathbb{N}$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1) συγκλίνει πρός τόν ἀριθμόν S, ἤτοι:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Τό S καλεῖται τότε τό **ἄθροισμα** τῆς σειρᾶς (1).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγεται, ὅτι ἡ σύγκλισις μιᾶς σειρᾶς ἀνάγεται εἰς τήν σύγκλισιν τῆς ἀκολουθίας τῶν μερικῶν της ἀθροισμάτων.

Ἐάν ἡ ἀκολουθία $\{S_n\}, n\in\mathbb{N}$ δέν ἔχῃ ὅριον ἤ ἔχῃ ὅριον τό ∞, τότε λέγομεν ὅτι ἡ σειρά (1) ἀποκλίνει.

- **Παράδειγμα** Νά μελετηθῆ ὡς πρός τήν σύγκλισιν ἡ γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \equiv 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

Λύσις: Ἔχομεν:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad \text{μέ } z \neq 1$$

τότε :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & \text{ἄν } |z| < 1 \\ \nexists, & \text{ἄν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

Ἔστω ἡ συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=\cdot}^{\infty} z_n = S \qquad (1'')$

Ἡ διαφορά: $R_n = S - S_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots$ καλεῖται **ὑπόλοιπον** τῆς συγκλινούσης σειρᾶς (1") τάξεως n.

Προφανῶς, ἵνα ἡ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνῃ, πρέπει καί ἀρκεῖ: $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

• Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τήν πρότασιν I-1-2 καί τούς συμβολισμούς τῆς σελίδος 107 τοῦ πρώτου Τόμου ἀποδεικνύομεν εὐκόλως τήν κάτωθι σπουδαίαν πρότασιν, ἥτις ἀνάγει τήν σύγκλισιν μιᾶς σειρᾶς μέ μιγαδικούς ὅρους εἰς τήν σύγκλισιν σειρῶν μέ πραγματικούς ὅρους.

Πρότασις II-1-1. Ἔστω ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ μέ $z_n = x_n + iy_n$.
Αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n) = Re(S)$ καί $\sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n) = Im(S)$

Πρότασις II-1-2. Ἐάν $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ καί $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = S \pm T$ καί $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot z_n = k \cdot S$ (k = σταθερά).

Ἡ ἀπόδειξις ἀφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τόν ἀναγνώστην.

• Μία ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη συγκλίσεως σειρᾶς μέ μιγαδικούς ὅρους προκύπτει ἀπό τό κριτήριον τοῦ Cauchy (βλ. πρότασιν I-1-3) δι' ἀκολουθίας μέ μιγαδικούς ὅρους.

Σχετικῶς ἰσχύει ἡ κάτωθι:

Πρότασις II-1-3. (Κριτήριον τοῦ Cauchy διά σειράς). Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη διά νά συγκλίνῃ μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι: διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀκέραιος $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύῃ:

$$|S_m - S_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m| \equiv \left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| < \varepsilon \text{ διά } m > n > N. \text{ ἤ } |S_n - S_{n+k}| < \varepsilon \text{ διά } n > N(\varepsilon) \text{ καί } k = 1, 2, \ldots$$

Ἀπόδειξις: Ἡ πρότασις δηλοῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{S_n\}, n \in N$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων συγκλίνει ἐάν, καί μόνον ἐάν, αὕτη εἶναι μιά ἀκολουθία Cauchy. Τοῦτο ὅμως ἀποτελεῖ τό περιεχόμενον τῆς προτάσεως I-2-3.

Ἐκ τοῦ κριτηρίου τοῦ Cauchy ἐξάγεται τώρα εὐκόλως ἡ κάτωθι:

Πρότασις II-1-4. Ἀναγκαία (ἀλλ' ὄχι ἱκανή) συνθήκη διά τήν σύγκλισιν τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Παρατήρησις: Ἡ ἀνωτέρω πρότασις διατυποῦται καί οὕτω: ἐάν $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, τότε ἡ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ἀποκλίνει.

Ὁρισμός II-1-2. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ (μέ μιγαδικούς ὅρους) ***συγκλίνει ἀπολύτως*** *τότε, καί μόνον τότε, ἄν ἡ σειρά* (μέ πραγματικούς ὅρους) $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *συγκλίνῃ*.

Ἰσχύει καί ἐδῶ ἡ ἀντίστοιχος τῆς προτάσεως VIII-3-1 τοῦ Πρώτου Τόμου, ἤτοι ἡ:

Πρότασις II-1-5. Ἐάν μία σειρά μιγαδικῶν ἀριθμῶν συγκλίνῃ ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καί ἁπλῶς.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε συμφώνως πρός τήν πρότασιν II-1-3, θά ἔχωμεν: διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀκέραιος $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύῃ:

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_m| < \varepsilon \quad \text{διά } m > n > N.$$

Ἀλλά

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_m|$$

καί συνεπῶς ἔχομεν:

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m| < \varepsilon \quad \text{διά } m > n > N$$

Ὅθεν, κατά τό κριτήριον τοῦ Cauchy, ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει.

Παρατήρησις: Τό ἀντίστροφον τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δέν ἰσχύει, ἤτοι ἡ σύγκλισις τῆς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ δέν συνεπάγεται πάντοτε τήν σύγκλισιν τῆς $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, ὡς ἐμφαίνεται ἀπό τήν σειράν $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/_n$ ἥτις συγκλίνει ἁπλῶς, ἀλλά οὐχί ἀπολύτως.

Πρότασις II-1-6. (Κριτήριον συγκρίσεως). Ἐάν $|z_n| \leq |W_n|$ διά κάθε $n > N_0$ καί ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ἀπολύτως.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ συγκλίνει ἀπολύτως θά ἔχωμεν: διά κά-

δε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἀκέραιος $N \geqq N_0$ τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε $n, m > N$ νά ἰσχύη:

$$|W_{n+1}|+|W_{n+2}|+\cdots+|W_m| < \varepsilon.$$

Ἀλλά

$$|z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\cdots+|z_m| \leqq |W_{n+1}|+|W_{n+2}|+\cdots+|W_m| \text{ διά } n > N_0$$

Ὅθεν:

$$|z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\cdots+|z_m| < \varepsilon \text{ διά κάθε } n > N$$

καί συνεπῶς ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ἀπολύτως.

• Διά σειράς μέ μιγαδικούς ὅρους ἰσχύουν, ὡς εὐκόλως δύναταί τις νά ἀποδείξη, αἱ ἀντίστοιχοι τῶν προτάσεων VIII-5-1 (κριτήριον τῶν ριζῶν τοῦ Cauchy) καί VIII-5-2 (κριτήριον τῶν λόγων τοῦ D' Alembert) τοῦ Πρώτου Τόμου.

Ἐπίσης ἰσχύει ἡ ἀντίστοιχος τῆς προτάσεως XVII-1-1 τοῦ Πρώτου Τόμου, ἤτοι ἡ πρότασις:

Πρότασις II-1-7. (Γινόμενον σειρῶν κατά Cauchy).

Ἔστωσαν αἱ σειραί $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ · ὑποθέτομεν ὅτι:

1ον/ Ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ἀπολύτως (κατά συνέπειαν καί ἁπλῶς), ἔστω δέ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$

2ον/ Ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ συγκλίνει ἁπλῶς καί ἔστω $\sum_{n=1}^{\infty} W_n = T$.

3ον/ Ἔστω $c_n = \sum_{k=1}^{n} z_k W_{n-k+1} = z_1 W_n + z_2 W_{n-1} + \cdots + z_{n-1} W_2 + z_n W_1$, $n = 1, 2, \ldots$

Τότε: $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S \cdot T$

Διά μίαν ἀπόδειξιν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως παραπέμπομεν τόν ἀναγνώστην εἰς τά κάτωθι βιβλία.

1) K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, pp. 146-147.

2) Φ. Βασιλείου, Ἀνώτερα Μαθηματικά, Τόμος Α', τεῦχος β' σελ. 475-476.

Ἀσκήσεις

1. Ὑπολογίσατε, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν, τά κάτωθι ὅρια:

   i) $\lim\limits_{n\to\infty} i^n$, ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+i)^2}{3^{2n}}$, iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(-1)^n + \frac{ni}{n+1}\right]$

   iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!\, i^n}{n^n}$, v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i^n}{n^2}$, vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1-2ni}{n+2i}$.

2. Δείξατε ὅτι, ἐάν $z_n \longrightarrow a,\ n\uparrow\infty$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n} = a$$

3. Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ὅρια:

   i) $Z_n = \frac{2^n}{n!} + \frac{i^n}{2^n}$ ii) $z_n = \sqrt[n]{n} + i\cdot n\cdot q^n$ $(|q|<1)$. iii) $z_n = \sqrt[n]{a} + i\eta\mu\frac{1}{n}$ $(a>0)$.

4. Νά ἐξετασθοῦν ὡς πρός τήν σύγκλισιν αἱ κάτωθι σειραί:

   i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$, ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 i^n$, iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, i^n}{n^n}$, iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 i^n}{n^3+1}$ v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3}\right)^n$, vi) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2+3i}\right)^n$

   vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n+1}$ viii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n+2}$, ix) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} i^n$, x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+3^n)\, i^n}{3^n \cdot n^3}$.

5. Ἔστω $\{z_n\}, n\in\mathbb{N}$ μία ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ἔστω δέ ὅτι ὑπάρχει τό $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \ell$. Δείξατε τότε ὅτι:

   i) ἐάν $\ell < 1$, ἡ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ἀπολύτως

   ii) ἐάν $\ell > 1$, ἡ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ ἀποκλίνει.

   Τί συμβαίνει ἐάν $\ell = 1$;

§ 2. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΙ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΑΙ ΔΙ' ΑΥΤΩΝ.

<u>Ὁρισμός ΙΙ-2-1</u>. *Καλοῦμεν δυναμοσειράν μέ μιγαδικούς συντελεστάς κέντρου* z_0 *κάθε σειράν τῆς μορφῆς*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1\cdot(z-z_0) + \cdots + c_n (z-z_0)^n + \cdots \qquad (1)$$

ἔνθα z *εἶναι μιγαδική μεταβλητή καί* $z_0, c_1, c_2, \ldots$ *εἶναι σταθεροί μιγαδικοί ἀριθμοί.* Οἱ ἀριθμοί c_n, $n=0,1,\ldots$ καλοῦνται *συντελεσταί* τῆς δυναμοσειρᾶς (1).

Διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=z-z_0$ τῆς μεταβλητῆς z ἡ δυναμοσειρά μέ κέντρον τό σημεῖον z_0 ἀνάγεται εἰς μίαν δυναμοσειράν τῆς μεταβλητῆς w μέ κέντρον τό 0.

Προφανῶς πᾶσα δυναμοσειρά συγκλίνει πάντοτε εἰς τό κέντρον αὐτῆς.

Πρότασις II-2-1. (Θεώρημα τῶν Cauchy-Hadamard)

Κάθε δυναμοσειρά τῆς μορφῆς (1) ἔχει μία "ἀκτῖνα συγκλίσεως" R τοιαύτην, ὥστε: ὅταν $0<R<+\infty$ ἡ σειρά συγκλίνει ἀπολύτως διά $|z-z_0|<R$ καί ἀποκλίνει διά $|z-z_0|>R$. Ὅταν $R=0$ ἡ σειρά συγκλίνει μόνον διά $z=z_0$, ἐνῶ ἄν $R=+\infty$, ἡ σειρά συγκλίνει διά κάθε $z\in\mathbb{C}$.

Ἀπόδειξις: Ἐάν καλέσωμεν $a_n=c_n(z-z_0)^n$, ἔχομεν:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|z-z_0|=|z-z_0|\cdot\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{|z-z_0|}{R}$$

ἔνθα
$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

Ἡ σειρά (1) λοιπόν, συμφώνως πρός τό κριτήριον τῶν ριζῶν τοῦ Cauchy, συγκλίνει ἀπολύτως ὅταν $\frac{|z-z_0|}{R}<1$, δηλαδή ὅταν $|z-z_0|<R$ καί ἀποκλίνει ὅταν $\frac{|z-z_0|}{R}>1$, δηλαδή ὅταν $|z-z_0|>R$. Ὅταν $R=0$, ἡ σειρά θά συγκλίνη μόνον διά $z=z_0$. Τέλος, ἄν $R=\infty$, τότε ἡ σειρά συγκλίνει δι' ὅλας τάς τιμάς τοῦ z.

Παρατήρησις: Ὅταν $0<R<+\infty$, τότε ὁ κύκλος $|z-z_0|=R$ καλεῖται ***"κύκλος συγκλίσεως"*** τῆς δυναμοσειρᾶς (1), ὁ δέ θετικός ἀριθμός R, καλεῖται, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, ***"ἀκτίς συγκλίσεως"*** τῆς δυναμοσειρᾶς (1). Ἡ ἀνωτέρω Πρότασις II-2-1 μᾶς πληροφορεῖ ὅτι κάθε δυναμοσειρά τῆς μορφῆς $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ἀπολύτως εἰς κάθε σημεῖον κείμενον εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου συγκλίσεώς της καί ἀποκλίνει εἰς κάθε σημεῖον κείμενον εἰς τό ἐξωτερικόν τοῦ κύκλου συγκλίσεως αὐτῆς. Ὅπως παρατηροῦμεν, ἡ πρότασις οὐδεμίαν πληροφορίαν παρέχει περί τῆς συγκλίσεως ἤ ἀποκλίσεως τῆς σειρᾶς εἰς τά συνοριακά σημεῖα τοῦ κύκλου συγκλίσεως. Πράγματι ἡ συμπεριφορά τῆς σειρᾶς διά τά σημεῖα αὐτά ποικίλει ἀπό τῆς μιᾶς περιπτώσεως εἰς τήν ἄλλην, ὅπως βλέπομεν ἀπό τά κάτωθι παραδείγματα, εἰς τά ὁποῖα ἡ ἀκτίς συγκλίσεως $R=1$.

Παράδειγμα 1ον/ Ἡ σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ εἶναι ἀποκλίνουσα δι' ὅλα τά συνοριακά σημεῖα.

Παράδειγμα 2ον/ Ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει διά κάθε σημεῖον τοῦ κύκλου συγκλίσεώς της.

Παράδειγμα 3ον/ Ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει διά $z=-1$ καί ἀποκλίνει διά $z=1$.

Ἐφαρμόζοντες τό κριτήριον τῶν λόγων τοῦ D'Alembert παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν τό $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ ὑπάρχη, τότε ἡ δυναμοσειρά (1) θά συγκλίνη, ἐάν:

$$|z-z_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$$

καί ἀποκλίνει ἐάν

$$|z-z_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$$

Θέτοντες:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad (2)$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει, ὅταν $|z-z_0| < R$ καί ἀποκλίνει, ὅταν $|z-z_0| > R$. Ὅθεν ἡ ἀκτίς συγκλίσεως τῆς (1) δίδεται καί ὑπό τοῦ τύπου (2), ὅταν τό ὅριον τοῦ δευτέρου μέλους ὑπάρχη.

Ἐάν τό $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ ὑπάρχη, τότε αὐτό ἰσοῦται μέ τό $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}$ (βλ. Τόμος Πρῶτος, πρότασις VIII-6-1)

Ὅθεν, ἡ ἀκτῖνα συγκλίσεως τῆς (1) δίδεται ἐπίσης ὑπό τοῦ τύπου:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (3)$$

ὑπό τήν προϋπόθεσιν, βεβαίως, ὅτι τό ὅριον δεξιά ὑπάρχει.

Παρατήρησις: Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀκτῖνος συγκλίσεως μιᾶς δυναμοσειρᾶς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ συνάγεται ὅτι:
διά κάθε z μέ $|z| < R$ ἡ σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot z^n|$ συγκλίνει, δηλαδή ἡ σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει ἀπολύτως, ὁπότε αὕτη συγκλίνει καί ἁπλῶς, ὁρίζεται ὅθεν μία συνάρτησις:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n, \text{ διά κάθε } z \text{ μέ } |z| < R.$$

§ 3 Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ e^z

Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἐλέχθη ὅτι κάθε δυναμοσειρὰ τῆς μορφῆς :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς συγκλίσεως εἶναι $R>0$, ὁρίζει διὰ κάθε $z\in\mathbb{C}$ μὲ $|z|<R$ ἀντιστοίχως διὰ κάθε $z\in\mathbb{C}$ μὲ $|z-z_0|<R$ μίαν μιγαδικὴν συνάρτησιν :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τὴν δυναμοσειράν : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, ὅπου $0!=1$, καὶ $1!=1$. Αὐτή, ὡς εὐκόλως εὑρίσκομεν, ἔχει ἀκτῖνα συγκλίσεως $R=+\infty$, ἄρα συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν II-2-1, αὐτὴ συγκλίνει διὰ κάθε $z\in\mathbb{C}$, μάλιστα δὲ αὐτὴ συγκλίνει καὶ ἀπολύτως, καθ' ὅσον συγκλίνει πάντοτε ἡ σειρά.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = 1+\frac{|z|}{1!}+\frac{|z|^2}{2!}+\cdots+\frac{|z|^n}{n!}+\cdots$$

Δυνάμει τώρα τῶν ἀνωτέρω ἡ δυναμοσειρὰ : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ὁρίζει διὰ κάθε $z\in\mathbb{C}$ μίαν μιγαδικὴν συνάρτησιν $f(z)$, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν μὲ e^z, ἤτοι :

$$e^z \underset{\text{ὁρσ}}{=} 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \qquad (1)$$

καὶ τὴν καλοῦμεν **ἐκθετικὴν συνάρτησιν.**

Θὰ ἴδωμεν τώρα μερικὰς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως e^z :

<u>**Πρότασις II-3-1**</u>. <u>Ἐὰν</u> $z_1=x_1+iy_1$ <u>καὶ</u> $z_2=x_2+iy_2$ <u>εἶναι δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει</u> :

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2} \qquad (2)$$

<u>**Ἀπόδειξις**</u> : Διὰ $z=z_1, z_2$ αἱ δύο σειραὶ (1) συγκλίνουν ἀπολύτως, ἄρα συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν II-1-7 εἶναι :

$$\begin{aligned} e^{z_1}\cdot e^{z_2} &= \left(1+z_1+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\cdots\right)\left(1+z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+\cdots\right)= \\ &= 1+z_1+z_2+\frac{z_1^2}{2!}+z_1z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\cdots=1+(z_1+z_2)+\left(\frac{z_1^2}{2!}+z_1z_2+\frac{z_2^2}{2!}\right)+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!\,m!}z_1^{n-m}\cdot z_2^m\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n}{m}z_1^{n-m}\cdot z_2^m\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=e^{z_1+z_2} \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.} \end{aligned}$$

Παρατήρησις: Θέτοντες $z_1=z$ καί $z_2=-z$ ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν:

$$e^{-z}=\frac{1}{e^z} \qquad (3)$$

Πρότασις II-3-2: Ἐάν $z=x+iy$, τότε ἰσχύει:

$$e^z=e^x\cdot(\sigma\upsilon\nu y+i\,\eta\mu y) \qquad (4)$$

Ἀπόδειξις: Ἐάν $z=x+iy$, λόγῳ τῆς (2) ἔχομεν:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$$

Ἐκ τῆς (1) διά καθαρῶς φανταστικόν $z=iy$ ($y=$ πραγματικός) ἔχομεν:

$$e^{iy}=1+\frac{yi}{1!}+\frac{(yi)^2}{2!}+\dots+\frac{(yi)^n}{n!}+\cdots$$

ἤ χωρίζοντες τούς πραγματικούς καί μιγαδικούς ὅρους:

$$e^{iy}=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\cdots\right)$$

Ἔχοντες τώρα ὑπ' ὄψιν τά ἀναπτύγματα κατά Maclaurin τῶν συναρτήσεων συνy καί ημy (βλ. Τόμος Πρῶτος, σελίς 647) εἰς συγκλίνουσας δυναμοσειρᾶς λαμβάνομεν:

$$\boxed{e^{iy}=\sigma\upsilon\nu y+i\,\eta\mu y} \qquad (5)$$

καί ἐπομένως:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\,(\sigma\upsilon\nu y+i\eta\mu y).$$

Σημείωσις: Ἐκ τῆς (5) διά $y=\pi$ καί $y=2\pi$ λαμβάνομεν:

$$e^{i\pi}=-1 \quad \text{καί} \quad e^{2\pi i}=1.$$

- Ἡ σχέσις (5) παρέχει νέον τρόπον (ἐκθετικῆς) παραστάσεως μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ: $z=\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)=\rho\,e^{i\theta}$. Ἐπίσης ἐκ τῆς (5) δι' ἀλλαγῆς τοῦ y εἰς −y προκύπτει:

$$e^{-iy}=\sigma\upsilon\nu y-i\eta\mu y \qquad (6)$$

Ἐκ τῶν (5) καί (6) ἔχομεν τούς τύπους:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}} \quad (7_1) \qquad \text{καί} \qquad \boxed{\eta\mu y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}} \quad (7_2)$$

τούς ὁποίους ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τό Κεφάλαιον τῶν Διαφορικῶν Ἐξισώσεων.

Πρότασις II-3-3. Ἐάν $z=x+iy$, τότε ἰσχύουν:

i) $e^z\neq 0$ διά κάθε $z\in\mathbb{C}$ (8)

ii) $|e^{iy}|=1$ καί $|e^z|=e^x$ $(z=x+iy)$ (9)

iii) <u>Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ἵνα</u> $e^z=1$, <u>εἶναι ὅτι</u> $z=2k\pi i$ (<u>ὅπου</u> k <u>εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός</u>).

iv) <u>Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ἵνα</u> $e^{z_1}=e^{z_2}$, <u>εἶναι ὅτι</u>: $z_1-z_2=2k\pi i$, <u>ὅπου</u> $k\in\mathbb{Z}$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: i) Χρησιμοποιοῦντας τήν (2) ἔχομεν:

$$e^z\cdot e^{-z}=e^0=1$$

Ἐφ' ὅσον τό γινόμενον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, οὐδείς τῶν παραγόντων εἶναι μηδέν καί ἑπομένως $e^z\neq 0$ διά κάθε z.

ii) Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$|e^{iy}|=\sqrt{\text{συν}^2 y+\text{ημ}^2 y}=1$$

Ἐπίσης ἐκ τῆς (4) ἔχομεν:

$$|e^z|=|e^x|\cdot|e^{iy}|=|e^x|=e^x,\ \text{καθ' ὅσον } e^x>0.$$

iii) <u>Ἀναγκαία</u>. Ὑποθέτομεν ὅτι $e^z=1$, τότε

$$e^x\text{συν}y=1 \quad \text{καί} \quad e^x\text{ημ}y=0$$

Ἐκ τῆς δευτέρας, ἐφ' ὅσον $e^x\neq 0$, ἔχομεν: $\text{ημ}y=0$. Ὅθεν $y=n\pi$, ὅπου n ἀκέραιος. Ἀλλά $\text{συν}n\pi=(-1)^n$. Ἐφ' ὅσον ὅμως $e^x>0$, θά εἶναι: $e^x(-1)^n=1$ μόνον ἄν $x=0$ καί $n=2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Ἑπομένως:

$$z=x+iy=0+in\pi=2k\pi i$$

<u>Ἱκανή</u> Ὑποθέτομεν ὅτι $z=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. Τότε, λόγῳ τῆς (5) ἔχομεν:

$$e^z=e^{2k\pi i}=\text{συν}(2k\pi)+i\text{ημ}(2k\pi)=1$$

iv) Παρατηρήσατε ὅτι:

$$e^{z_1}=e^{z_2} \text{ ἐάν, καί μόνον ἐάν, } e^{z_1-z_2}=1$$

καί ἀκολούθως ἐφαρμόσατε τήν (iii).

<u>Παρατήρησις</u>. Πολλάκις θέτομεν χάριν εὐκολίας:

$$\boxed{e^z=\exp z}$$

§4. <u>ΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

<u>Ὁρισμός II-4-1</u>. *Δοθέντος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z ὁρίζομεν:*

$$\text{συν}z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad \text{καί} \quad \text{ημ}z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad (1)$$

Λαμβάνοντες τό z ὡς πραγματικόν ἀριθμόν λαμβάνομεν ἀμέσως ἐκ τῶν ἀνω-

τέρων τύπων, τούς τύπους (7) της προηγουμένης παραγράφου.

'Εκ τῶν (1), χρησιμοποιοῦντες πράξεις μέ μιγαδικάς σειράς, ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \qquad (2)$$

$$\eta\mu z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad (3)$$

καθώς καί

$$\boxed{e^{iz} = \sigma\upsilon\nu z + i\eta\mu z} \qquad (4)$$

Αἱ συναρτήσεις εφz καί σφz ὁρίζονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\varepsilon\varphi z = \frac{\eta\mu z}{\sigma\upsilon\nu z} = -i\,\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \qquad (5)$$

$$\sigma\varphi z = \frac{\sigma\upsilon\nu z}{\eta\mu z} = i\,\frac{e^{2zi}+1}{e^{2zi}-1}, \quad z \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \qquad (6)$$

<u>Ὁρισμός II-4-2</u>. *Δοθέντος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z ὁρίζομεν:*

$$\text{Cosh}\, z = \sigma\upsilon\nu\, iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{Sinh}\, z = -i\eta\mu\, iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\text{Sinh}\, z}{\text{Cosh}\, z}, \qquad \text{Coth}\, z = \frac{\cosh z}{\text{Sinh}\, z}, \quad z \neq n\pi i$$

Τά ἀναπτύγματα εἰς σειράν δυνάμεων τῶν Coshz καί Sinhz εἶναι:

$$\text{Cosh}\, z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\text{Sinh}\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

'Επίσης, δυνάμεθα εὐκόλως νά ἀποδείξωμεν τούς κάτωθι τύπους:

$$\text{Cosh}^2 z - \text{Sinh}^2 z = 1$$

$$\text{Sinh}(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\text{Cosh}(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \text{Sinh}\, z_1 \text{Sinh}\, z_2 .$$

§5. <u>Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ logw</u>[1)]

Εἰς τήν §3 ὁρίσαμεν τήν ἐκθετικήν συνάρτησιν e^z. Ἤδη πρίν ὁρίσωμεν τήν συνάρτησιν logw εἶναι ἀπαραίτητον νά παραθέσωμεν τό κάτωθι:

<u>Θεώρημα II-5-1</u>. 'Εάν w εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός ≠ 0, τότε ὑπάρχει ἕνας μι-

---

1) *Εἰς τήν §3 τοῦ Κεφ. IV θά ἐπανέλθωμεν δι' ἐκτενεστέραν μελέτην.*

γαδικός ἀριθμός z τοιοῦτος, ὥστε $e^z = W$ (1). Ἕνας τοιοῦτος μιγαδικός ἀριθμός z εἶναι ὁ ἀριθμός

$$\log|w| + i \cdot \arg w$$

καί κάθε ἄλλος z θά ἔχει τήν μορφήν:

$$\log|w| + i \cdot \arg w + 2k\pi i, \text{ ὅπου } k\text{: ἀκέραιος}$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω $\arg w = \theta$. Ἐπειδή $e^{\log|w| + i\arg w} = e^{\log|w|} \cdot e^{i\theta} = |w|\{συν\theta + iημ\theta\} = w$, θά ἔχωμεν $z = \log|w| + i\arg w$, ὡς μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $e^z = w$. Ἐάν z_1 εἶναι καί μία ἄλλη λύσις τῆς (1), τότε $e^z = e^{z_1}$ ἐξ ἧς $z - z_1 = 2k\pi i$, k: ἀκέραιος. Ὅθεν κάθε λύσις τῆς (1) θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\log|w| + i \cdot \arg w + 2k\pi i, \text{ ὅπου } k\text{: ἀκέραιος.}$$

Ὁρισμός II-5-1. *Ἔστω $w \neq 0$ ἕνας μιγαδικός ἀριθμός. Ἐάν z εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός τοιοῦτος, ὥστε $e^z = w$ (1), τότε ὁ z καλεῖται λογάριθμος τοῦ w. Μία μερική λύσις τῆς (1) δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:*

$$z = \log|w| + i \cdot \arg w \quad (2)$$

καί ἡ ὁποία καλεῖται πρωτεύουσα τιμή τοῦ λογαρίθμου τοῦ w καί δι' αὐτόν τόν z γράφομεν $z = \log w$. Κατωτέρω ἀντί τοῦ W θά θεωροῦμεν τό z.

Θεώρημα II-5-2. Ἐάν $z_1 \cdot z_2 \ldots z_n \neq 0$ τότε $\log(z_1 \cdot z_2 \ldots z_n) = \log z_1 + \log z_2 + \cdots + \log z_n + 2k\pi i$ ὅπου k: ἀκέραιος:

Ἀπόδειξις: Εἶναι $\log(z_1 z_2 \cdots z_n) = \log|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| + i\arg(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \log|z_1| + \log|z_2| + \cdots + \log|z_n| + i \cdot [\arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n + 2k\pi] = (\log|z_1| + i \cdot \arg z_1) + (\log|z_2| + i\arg z_2) + \cdots + (\log|z_n| + i \cdot \arg z_n) + 2k\pi i = \log z_1 + \log z_2 + \cdots + \log z_n + 2k\pi i$.

Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθῆ ὁ $\log(1+i)$.

Λύσις: Εἶναι $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Ὅθεν, ἡ πρωτεύουσα τιμή τοῦ λογαρίθμου εἶναι $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i \cdot \frac{\pi}{4}$ καί κάθε ἄλλη τιμή αὐτοῦ εἶναι: $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις

1. Εὕρετε τήν ἀκτῖνα συγκλίσεως τῶν κάτωθι δυναμοσειρῶν:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^4}$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n(1+in^2)}$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$, v) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n(z-2)^n$, vi) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot z^n$.

2. Δείξατε ὅτι αἱ κάτωθι δύο σειραί:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad \text{καί} \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \cdot z^{n+1}}{n+1}$$

ἔχουν τόν αὐτόν κύκλον συγκλίσεως.

3. Ἐάν $\exp z$ συμβολίζη τό e^z, δείξατε τά κάτωθι:

i) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$

ii) $\exp(nz) = (\exp z)^n$ διά κάθε $n \in \mathbb{Z}$

iii) $|\exp(\lambda i z^2)| = e^{-2\lambda xy}$ διά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

iv) Ἐάν $\operatorname{Im}(z) > 0$, τότε: $|\exp(iz)| < 1$.

4. Ἐάν $z = x+iy$, δείξατε ὅτι:

i) $\eta\mu iy = i \sinh y$, $\sigma\upsilon\nu iy = \cosh y$

ii) $\eta\mu \bar{z} = \overline{\eta\mu z}$, $\sigma\upsilon\nu \bar{z} = \overline{\sigma\upsilon\nu z}$

iii) $\sigma\upsilon\nu z = \sigma\upsilon\nu x \cosh y - i\,\eta\mu x \cdot \sinh y$

iv) $|\eta\mu z|^2 = \sinh^2 y + \eta\mu^2 x$

5. Δείξατε ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu z_2 - \sigma\upsilon\nu z_1 = -2 \cdot \eta\mu\left(\frac{z_2+z_1}{2}\right) \eta\mu\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right).$$

6. Δείξατε ὅτι:

$$\varepsilon\varphi z = \frac{\eta\mu 2x + i \sinh 2y}{\sigma\upsilon\nu 2x + \cosh 2y}.$$

7. Ἐάν $z = x+iy$, δείξατε ὅτι:

i) $\sinh(iz) = i\,\eta\mu z$, $\sigma\upsilon\nu(iz) = \cosh z$.

ii) $|\sinh z|^2 = \eta\mu^2 y + \sinh^2 x$

iii) $|\cosh z|^2 = \sigma\upsilon\nu^2 y + \sinh^2 x$.

8. Δείξατε ὅτι: ἐάν $\tanh(x+iy) = u+iv$, ἔνθα x, y, u, v εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:

$$u = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \sigma\upsilon\nu 2y}, \quad v = \frac{\eta\mu 2y}{\cosh 2x + \sigma\upsilon\nu 2y}$$

9. Δείξατε ὅτι αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων $\eta\mu z = 0$, $\sigma\upsilon\nu z = 0$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί εὕρατε αὐτούς.

10. Νά εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν α) $1-i$ β) $2+3i$ γ) -1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§1. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἡ παράγωγος μιᾶς μιγαδικῆς συναρτήσεως ὁρίζεται κατ' ἀνάλογον τρόπον μὲ τὴν παράγωγον μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως (βλ. σχετ. Τόμος Α' Κεφ. XI).

Ὁρισμὸς III-1-1. *Ἔστω ἡ μονότιμος μιγαδικὴ συνάρτησις $f(z)$ ὡρισμένη εἰς ἕναν τόπον G τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}$, ὅπου $G\subset\mathbb{C}$. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος ἢ ὅτι ἔχει παράγωγον εἰς τὸ σημεῖον $z_0\in G$, ἐὰν ὑπάρχη τὸ ὅριον*

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad (1)$$

ἀνεξαρτήτως τοῦ δρόμου κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ $z\to z_0$ καὶ εἶναι τοῦτο (τὸ ὅριον) *πεπερασμένος ἀριθμός.*

Τὸ ἀνωτέρω ὅριον τὸ συμβολίζομεν οὕτω: $f'(z_0)$ ἢ $\dfrac{df(z_0)}{dz}$ καὶ καλεῖται **παράγωγος** τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τὴν θέσιν $z=z_0$.

Τὸ ὅριον (1) γράφεται καὶ οὕτω:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \quad (2), \text{ ὅπου ἐτέθη } \Delta z=z-z_0$$

Ἐὰν διὰ κάθε $z\in G$ ὑπάρχη ἡ παράγωγος τῆς $f(z)$ ἐν G, τότε ἡ $f(z)$ καλεῖται διαφορίσιμος ἐν G καὶ ἡ παράγωγος συμβολίζεται οὕτω: $f'(z)$ ἢ $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Ὅθεν, ἐξ ὁρισμοῦ

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \qquad (3)$$

Ἀποδεικνύεται ἐντελῶς ἀναλόγως ὅπως καὶ εἰς τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις ὅτι:

Πρότασις III-1-1. Ἐὰν ἡ μιγαδικὴ συνάρτησις $f(z)$ ὡρισμένη εἰς τὸν τόπον G διαφορίζεται εἰς τὸ σημεῖον $z_0\in G$, τότε αὕτη εἶναι καὶ συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον z_0.

• Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ διαφορίζεται εἰς τὴν θέσιν $z=z_0$. Ὁρίζομεν

τὴν συνάρτησιν:

$$g(z,z_0) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{διά κάθε } z\in G \text{ καί } z\neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{»} \quad z=z_0 \end{cases}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)\,g(z,z_0) \quad \text{διά } z\in G \qquad (3)$$

Λόγω τῆς κατασκευῆς τῆς $g(z,z_0)$ ἔχομεν:

$$\lim_{z\to z_0} g(z,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἡ πρότασις:

Πρότασις III-1-2. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἡ $f(z)$ διαφορίζεται εἰς τήν θέσιν $z=z_0$, εἶναι νά ὑπάρχη εἷς πεπερασμένος μιγαδικός ἀριθμός C καί μία συνάρτησις $R(z,z_0)$ ὡρισμένη ἐν G καί συνεχής εἰς τό σημεῖον $z_0\in G$ μέ $\lim_{z\to z_0} R(z,z_0)=0$ (ἤ $R(z_0,z_0)=0$) τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)\cdot C+(z-z_0)\,R(z,z_0), \quad (5) \quad z\in M$$

Προφανῶς, ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τό σημεῖον $z=z_0$, τότε $f'(z_0)=C$.

Διά τήν διαφορίσιμον συνάρτησιν $f(z)$ θέτοντες $z=z_0+h$ καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (5) ἔχομεν:

$$f(z_0+h)=f(z_0)+h\cdot f'(z_0)+h\cdot Q(z_0,h) \qquad (6)$$

ὅπου $\lim_{h\to 0} Q(z_0,h)=0$. (ἐτέθη $Q(z_0,h)\equiv R(z_0+h,z_0)$)

Ἡ $f(z)$ καλεῖται ***ἀναλυτική*** ἤ ***ὁλόμορφος*** εἰς τό σημεῖον z_0, ἐάν ὑπάρχη μία περιοχή $|z-z_0|<\delta$, ὅπου δι' ὅλα τά σημεῖα ταύτης ὑπάρχει ἡ $f'(z)$.

Ἐάν ἡ παράγωγος $f'(z)$ ὑπάρχη εἰς κάθε σημεῖον $z\in G$, τότε ἡ $f(z)$ καλεῖται ἀναλυτική ἤ ὁλόμορφος συνάρτησις εἰς τόν τόπον G.

Ὅπως καί εἰς τάς πραγματικάς συναρτήσεις οὕτω καί διά τάς μιγαδικάς τοιαύτας ἰσχύουν οἱ κάτωθι κανόνες παραγωγίσεως.

i) Ἐάν f καί g εἶναι δύο μιγαδικαί συναρτήσεις τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $z\in G$ καί διαφορίσιμοι εἰς τό σημεῖον z, τότε καί αἱ συναρτήσεις $c\cdot f$, $c\in\mathbb{C}$, $f\pm g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ μέ $g(z)\neq 0$ εἶναι διαφορίσιμοι εἰς τό z καί ἰσχύουν:

$$\frac{d(c\cdot f)}{dz}=c\cdot f', \quad \frac{d(f\pm g)}{dz}=f'\pm g', \quad \frac{d(f\cdot g)}{dz}=f'\cdot g+f\cdot g', \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'g-fg'}{g^2}, \; g\neq 0.$$

ii) Ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδέν.

iii) Ἡ συνάρτησις $f(z)=z$ εἶναι διαφορίσιμος διά κάθε z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καί ἰσχύει: $(z)'=1$.

iv) Ἡ παράγωγος τῆς $f(z)=z^n$ εἶναι: $\frac{dz^n}{dz}=n\cdot z^{n-1}$.

v) Ἐάν $h(w)$ εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη διά κάθε $w\in f(G)$ καί διαφορίσιμος εἰς τό σημεῖον $w=f(z)$, τότε καί ἡ σύνθετος συνάρτησις $h\circ f$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τό z καί ἰσχύει:

$$\frac{d}{dz}(h\circ f)(z)=\frac{dh(w)}{dw}\cdot\frac{df(z)}{dz}.$$

Παρατήρησις: Ὑπάρχουν καί συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι δέν εἶναι ἀναλυτικαί. Ἕνα χαρακτηριστικόν παράδειγμα εἶναι ἡ συνάρτησις $f(z)=\bar{z}$ ἡ ὁποία δέν εἶναι ἀναλυτική διά κάθε $z\in\mathbb{C}$.

Πράγματι, ἐξ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου ἔχομεν:

$$\frac{d\bar{z}}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} \qquad (1)$$

Θέτοντες $z=x+iy$, ὅτε $\bar{z}=x-iy$ καί $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{d\bar{z}}{dz}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{x-iy+\Delta x-i\Delta y-(x-iy)}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y} \qquad (2)$$

Ἐάν $\Delta y=0$, τό ὅριον (2) γίνεται $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

Ἐάν $\Delta x=0$, τότε τό ὅριον (2) γίνεται: $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1$.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, τό ὅριον (2) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δρόμου κατά τόν ὁποῖον τό $\Delta z\to 0$ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ συνάρτησις $f(z)=\bar{z}$ δέν ἔχει παράγωγον διά κάθε $z\in\mathbb{C}$, ἤτοι δέν εἶναι ἀναλυτική ἤ ἄλλως ὁλόμορφος συνάρτησις.

Μία συνάρτησις $f(z)$ καλεῖται ***ἀπείρως διαφορίσιμος*** εἰς ἕνα πεδίον G, ἐάν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $f'(z)$, $f''(z)=\frac{df'(z)}{dz}$, $f'''(z)=\frac{df''(z)}{dz}$, . . . διά κάθε $z\in G$.

Βραδύτερον θά γνωρίσωμεν συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπείρως διαφορίσιμοι, ὅπως αἱ $f(z)=e^z$, $f(z)=\text{ημ}\, z$, κ.τ.λ.

§2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἔστω ἡ διαφορίσιμος συνάρτησις $w = f(z)$. Θεωροῦμεν τήν διαφοράν:

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) \qquad (1)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος διά κάθε $z \in G \subseteq \mathbb{C}$. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τόν ὁρισμόν τῆς παραγώγου, ἡ σχέσις (1) δύναται νά γραφῆ:

$$\Delta w = f'(z)\cdot\Delta z + \varepsilon(z)\cdot\Delta z \qquad (2)$$

ὅπου $\varepsilon(z) \to 0$ καθώς τό $\Delta z \to 0$.

Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἔκφρασις:

$$dw = f'(z)\cdot\Delta z \qquad (3)$$

καλεῖται **διαφορικόν** τῆς $w=f(z)$ εἰς τήν θέσιν z.

Ἐάν $w = z$, τότε $(z)' = 1$ καί λόγω τῆς (3) ἔχομεν:

$$dz = 1\cdot\Delta z = \Delta z \qquad (4)$$

Ἡ (3), λόγω τῆς (4), γράφεται:

$$dw = f'(z)\, dz \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν καί τήν ἔκφρασιν τῆς παραγώγου ὡς πηλίκον διαφορικῶν, ἤτοι:

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz} \qquad (6)$$

Ἡ (2), λόγω τῆς (5), γράφεται:

$$\Delta w = df(z) + \varepsilon(z)\cdot\Delta z \qquad (7)$$

§3. ΑΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΤΩΝ CAUCHY-RIEMANN.

Κατωτέρω θά ἐξετάσωμεν δοθείσης μιᾶς μιγαδικῆς συναρτήσεως ποῖαι συνθῆκαι πρέπει νά πληροῦνται, ὥστε αὐτη νά εἶναι ἀναλυτική.

Θεώρημα III-3-1. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ὡρισμένη εἰς τόν τόπον $G \subseteq \mathbb{C}$ τότε, αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

α) Ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τόν τόπον G.

β) (Συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann). Ὑπάρχουν αἱ μερικοί παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y ἐν G καί εἶναι συνεχεῖς εἰς τόν τόπον G καί ἐπί πλέον ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι:

$$\boxed{u_x = v_y\,,\ u_y = -v_x}$$

Ἀπόδειξις: α ⟹ β. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει ἡ $f'(z)$, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει τό κάτωθι ὅριον.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)-\{u(x,y)+iv(x,y)\}}{\Delta x+i\Delta y} \quad (1)$$

καί τό ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου κατά τόν ὁποῖον τά $\Delta x, \Delta y$ τείνουν πρός τό μηδέν.

α) Ἐάν λάβωμεν $\Delta y=0$ καί $\Delta x\to 0$, τό ἀνωτέρω ὅριον (1) καθίσταται:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\cdot\left[\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]\right\}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

β) Ἐάν λάβωμεν $\Delta x=0$ καί $\Delta y\to 0$, τό ὅριον (1) καθίσταται:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\cdot\Delta y}+\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}\right\}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \quad (3)$$

Διά νά εἶναι λοιπόν ἡ $f(z)$ ἀναλυτική ἀρκεῖ τά ὅρια τά διδόμενα ὑπό τῶν ἰσοτήτων (2) καί (3) νά εἶναι ἴσα, ἤτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

Ἵνα ἰσχύῃ ἡ (4), ἀρκεῖ νά ἔχωμεν

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

β ⟹ α. Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $u(x,y)$ καί $v(x,y)$ ἔχουν μερικάς παραγώγους ὡς πρός x καί y συνεχεῖς, συνεπῶς δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=\Delta x\cdot u_x+\Delta y\cdot u_y+h\cdot\varepsilon_1(h) \quad (5)$$

καί $$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=\Delta x\cdot v_x+\Delta y\cdot v_y+h\cdot\varepsilon_2(h) \quad (6)$$

ὅπου $h=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ καί $\varepsilon_1(h)\to 0$, $\varepsilon_2(h)\to 0$ καθώς τό $h\to 0$ (βλ. σχετικῶς Τόμος Β΄ σελ. 51, ἀπόδειξιν).

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (5) καί (6) δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+i\{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\}}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\frac{\Delta x\cdot u_x+\Delta y\cdot u_y+i\cdot\Delta x\cdot v_x+i\cdot\Delta y\cdot v_y+h\cdot\varepsilon_1(h)+h\,\varepsilon_2(h)}{\Delta x+i\cdot\Delta y} \quad (7)$$

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann

ἤτοι $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ σχέσις (7) γράφεται:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = u_x + i\cdot v_x + \frac{h\cdot \varepsilon_1(h)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{h\cdot \varepsilon_2(h)}{\Delta x + i\Delta y} \qquad (8)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, καθώς τό $h \to 0$ θά εἶναι:

$\lim_{h\to 0}\left|\frac{h}{\Delta x+i\Delta y}\{\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)\}\right| = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\left|\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)\right| = 0$. Ἐκ τῆς (8) λοιπόν λαμβάνομεν:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = f'(z) = u_x + i v_x + \lim_{h\to 0}\frac{h}{\Delta x+i\Delta y}\{\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)\} = u_x + i v_x. \qquad (9)$$

Τό ὅριον τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου πού ἀκολουθεῖ τό $\Delta z \to 0$ καθώς τό $h \to 0$.

<u>Σπουδαία Παρατήρησις</u>: Πληρουμένων τῶν συνθηκῶν τῶν Cauchy-Riemann ἐκ τῆς σχέσεως (9) ἔχομεν:

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(z) = u_x + i v_x \\ f'(z) = v_y - i u_y \end{array} \text{ ἤ}} \qquad (10)$$

Αἱ σχέσεις (10) εἶναι σπουδαῖαι, καθ' ὅτι δυνάμεθα νά εὕρωμεν τήν παράγωγον μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως ἐκ τῶν μερικῶν παραγώγων τοῦ πραγματικοῦ καί μιγαδικοῦ μέρους αὐτῆς.

● <u>Ἐφαρμογαί</u> 1η/. Νά ἐξετασθῆ, ἐάν ἡ συνάρτησις $f(z) = e^z$ εἶναι ἀναλυτική καί νά εὑρεθῆ ἡ παράγωγος ταύτης.

<u>Λύσις</u>: Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x\{\sigma\upsilon\nu y + i\eta\mu y\} = e^x\sigma\upsilon\nu y + i\, e^x\eta\mu y.$$

Εἶναι δέ $u_x = e^x\sigma\upsilon\nu y$, $u_y = -e^x\eta\mu y$, $v_x = e^x\eta\mu y$, $v_y = e^x\sigma\upsilon\nu y$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων διαπιστοῦμεν ὅτι:

$$u_x = v_y \;,\; v_x = -u_y$$

δηλ. πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann καί ἐπί πλέον αἱ συναρτήσεις u_x, u_y, v_x, v_y <u>εἶναι συνεχεῖς</u>.

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις $f(z) = e^z$ εἶναι ἀναλυτική διά κάθε $z\in\mathbb{C}$. Ἡ δέ παρά

γωγος αὐτῆς θά εἶναι:

$$\frac{de^z}{dz} = u_x + i v_x = e^x \,συν y + i e^x \,ημ y = e^x \{συν y + i\, ημ y\} = $$
$$= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

2ª/. Δείξατε ὅτι, ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα πεδίον G καί ἐάν ἡ $|f(z)|$ εἶναι σταθερά ἐντός τοῦ G, τότε ἡ $f(z)$ εἶναι σταθερά ἐντός τοῦ G.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἐάν $|f(z)| \equiv 0$ ἐν G, τότε προφανῶς $f(z) \equiv 0$ ἐν G. Ἔστω ἤδη $|f(z)| \equiv M > 0$ ἐν G, τότε θά ἔχωμεν:

$$|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y) \equiv M^2 \qquad (1)$$

ὅπου $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Διαφορίζοντες τήν (1) ὡς πρός x καί y λαμβάνομεν:

$$\left.\begin{aligned} u\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2) \ διά\ (x,y)\in G$$

Αἱ συναρτήσεις u καί v δέν δύνανται νά μηδενίζονται συγχρόνως ἐν G ἐπειδή $u^2+v^2 = M^2 > 0$. Ἡ ὁρίζουσα λοιπόν τοῦ συστήματος (2) θά πρέπει νά εἶναι $= 0$ ἤτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ $f(z)$ ὡς ἀναλυτική θά ἱκανοποιῆ τάς συνθήκας τῶν Cauchy - Riemann ἤτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4) \ παντοῦ\ ἐν\ G.$$

Ἐκ τῶν (3) καί (4) λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (5)$$

Διά νά ἰσχύῃ ἡ (5) θά πρέπει νά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (6)$$

καί λόγῳ τῶν (4) καί τῶν (6) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (7) \ παντοῦ\ ἐν\ G.$$

Λόγῳ τῶν (6) καί (7) ἔχομεν:

$u(x,y) = C_1$ καί $v(x,y) = C_2$ παντοῦ ἐν G, ὅπου C_1, C_2 σταθεροί πραγματικοί ἀριθμοί.

Ἄρα $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = C_1 + i\cdot C_2$ (σταθερά).

• Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι, $\frac{de^z}{dz} = e^z$, τούς τύπους τῆς § 4 τοῦ Κεφ. II τούς ὁρίζοντας τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς καθώς καί τούς κανόνας τῆς παραγωγίσεως, εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι:

i) $\frac{d\eta\mu z}{dz} = \sigma\upsilon\nu z$ ii) $\frac{d\sigma\upsilon\nu z}{dz} = -\eta\mu z$ iii) $\frac{d\epsilon\varphi z}{dz} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 z}$

iv) $\frac{d\sinh z}{dz} = \cosh z$ v) $\frac{d\cosh z}{dz} = \sinh z$ vi) $\frac{d\tanh z}{dz} = \frac{1}{\cosh^2 z}$

§ 4. ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἐάν ἡ $f(z) \equiv u(x,y) + iv(x,y)$ εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις, τότε αἱ $u(x,y)$ καί $v(x,y)$ καλοῦνται **συζυγεῖς συναρτήσεις**. Ἐπειδή αἱ συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ ἱκανοποιοῦν τάς συνθήκας τῶν Cauchy-Riemann, θά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ὅθεν,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Συνεπῶς:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \left(= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)$$

καί

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Ἀναλόγως ἔχομεν:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) συμπεραίνομεν ὅτι, αἱ συζυγεῖς συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ ἱκανοποιοῦν τήν διαφ. ἐξίσωσιν τοῦ Laplace, ἤτοι εἶναι ἁρμονικαί συναρτήσεις.

• **Παραδείγματα** 1ον Δίδονται αἱ συναρτήσεις $u = x^3 - 3xy^2$ καί $v = 3x^2y - y^3$.

Δείξατε ὅτι αὗται εἶναι συζυγεῖς καί ἀκολούθως εὕρατε τήν ἀναλυτικήν συνάρτησιν ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν

Λύσις: Εἶναι $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Διαπιστοῦμεν ὅτι αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann ἐπαληθεύονται. Ὅθεν αἱ δοθεῖσαι συναρτήσεις εἶναι συζυγεῖς. Ἡ ὁριζομένη ὑπ' αὐτῶν ανα-

λυτική συνάρτησις $f(z)$ εἶναι $f(z)=u+iv=(x^3-3xy^2)+i\ (3x^2y-y^3)=z^3$.

• 2ον Νὰ εὑρεθοῦν ὅλες οἱ ἁρμονικὲς συναρτήσεις τοῦ τύπου $u=f(x^2+y^2)$.

Λύση: Αὐτες θὰ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωση τοῦ Laplace ἤτοι:

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Θέτομεν: $t=x^2+y^2$ καὶ ἔχομεν $t=t\ (x,y)$. Θὰ εἶναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + f'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(t)\cdot\frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + f'(t)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad (3)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2\right] f''(t) + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) f'(t) = 0 \quad \text{ἤ} \quad t\cdot f''(t) + f'(t) = 0 \quad (4)$$

Η (4) εἶναι διαφ. ἐξίσωση τοῦ Euler καὶ ὁλοκληρουμένη κατὰ τὰ γνωστὰ δίδει τὴν λύση: $f(t)=C_1 \log t + C_2$ (5) ἢ $u=f(x^2+y^2)=C_1\log(x^2+y^2)+C_2$.

• **Πρόβλημα:** Ἔστω ἡ συνάρτησις $u(x,y)=x^2-y^2$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ συζυγὴς ταύτης.

Λύσις: Ἔστω $v(x,y)$ ἡ συζυγὴς τῆς δοθείσης. Αὗται θὰ ἱκανοποιοῦν τὰς ἐξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ἤ}$$

$$2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{καὶ} \quad -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) λαμβάνομεν:

$v(x,y)=2xy+\varphi(x)$ (2), ὅπου $\varphi(x)$ αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ x. Πρέπει δὲ ἡ συνάρτησις (2) νὰ ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν δευτέραν τῶν (1), ἤτοι:

$$-2y = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{2xy+\varphi(x)\right\} \quad \text{ἤ} \quad 2y = 2y + \varphi'(x).$$

Συνεπῶς $\varphi'(x)=0$, ἐξ ἧς $\varphi(x)=c$, ὅπου c αὐθαίρετος σταθερά.

Ὅθεν, ἡ ζητουμένη συνάρτησις εἶναι $v(x,y)=2xy+c$.

§5 ΑΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΤΩΝ CAUCHY-RIEMANN ΥΠΟ ΠΟΛΙΚΗΝ ΜΟΡΦΗΝ.

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $w=f(z)$, ὅπου $z=x+iy$.

Θεωροῦντες πολικάς συντεταγμένας (r,θ) θά ἔχωμεν ὡς γνωστόν:

$$x = r\,\sigma\upsilon\nu\theta,\quad y = r\,\eta\mu\theta \qquad (1)$$

ὅπου $r=\sqrt{x^2+y^2}$ καί $\theta = \tau o\xi\,\varepsilon\varphi(y/x)$.

Θά δυνάμεθα νά γράψωμεν ἐν προκειμένῳ

$$z = x+iy = r\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = r\cdot e^{i\theta} \qquad (2),$$

τό δέ πραγματικόν καί τό φανταστικόν μέρος τῆς $w=f(z)=u+iv$ δύνανται νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῶν x καί y ἤ τῶν r καί θ.

Ἐφαρμόζοντες τούς κανόνας παραγωγίσεως πραγματικῆς συναρτήσεως δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν ἐπιτυγχάνομεν ὥστε αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι τῶν u καί v ὡς πρός x καί y νά εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ (x,y) εἰς ἕνα σημεῖον μή μηδενίζον ταύτας, ἐάν αἱ πρῶται μερικαί παράγωγοι ὡς πρός r καί θ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ (r,θ) εἰς αὐτό τό σημεῖον καί ἀντιστρόφως. Πράγματι,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial r}\,\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\eta\mu\theta \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial r}\,\eta\mu\theta+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (4).$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta}\,\eta\mu\theta \qquad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\cdot\eta\mu\theta+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta}\,\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (6)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῶν Cauchy-Riemann: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ἔχομεν, ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τάς (3) καί (6):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\sigma\upsilon\nu\theta-\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\eta\mu\theta=0 \qquad (7)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῶν Cauchy-Riemann: $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ἔχομεν, ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τάς (4) καί (5):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\eta\mu\theta+\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\sigma\upsilon\nu\theta=0 \qquad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντες τήν (7) ἐπί συνθ καί τήν (8) ἐπί ημθ καί προσθέτοντες

λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial\theta} = 0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial\theta} \qquad (9)$$

Πολλαπλασιάζοντες τήν (7) ἐπί $-\eta\mu\theta$ καί τήν (8) ἐπί συνθ καί προσθέτοντες λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}. \qquad (10)$$

Ὥστε αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann εἰς πολικάς συντεταγμένας εἶναι αἱ ἐξισώσεις (9) καί (10) καί τάς ὁποίας ἐπαναλαμβάνομεν κατωτέρω.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial\theta}\,,\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}} \qquad (11)$$

- Βάσει τῶν τύπων (10) τῆς §3 ἔχομεν:

$$f'(z) = u_x + i\upsilon_x \qquad (12)$$

Λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν καί τούς τύπους (3) καί (5), τούς συνδέοντας τάς Καρτεσιανάς καί πολικάς συντεταγμένας καί τόν τύπον (10) τῆς §3 ἔχομεν:

$$f'(z) = \left\{u_r\,\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{r}u_\theta\,\eta\mu\theta\right\} + i\cdot\left\{\upsilon_r\,\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{r}\upsilon_\theta\,\eta\mu\theta\right\} \qquad (13)$$

Βάσει δέ τῶν συνθηκῶν (11) τῶν Cauchy-Riemann ἡ (13) γίνεται:

$$f'(z) = \left\{\frac{1}{r}\upsilon_\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{r}u_\theta\,\eta\mu\theta\right\} + i\cdot\left\{-\frac{1}{r}u_\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{r}\upsilon_\theta\,\eta\mu\theta\right\}$$

$$= \frac{1}{r}\upsilon_\theta\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta) - \frac{1}{r}\cdot u_\theta\,(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta) = \frac{(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta)}{r}(\upsilon_\theta - iu_\theta) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\cdot(\upsilon_\theta - iu_\theta).$$

Ὅθεν,

$$\boxed{f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\cdot(\upsilon_\theta - iu_\theta).} \qquad (14)$$

- **Ἐφαρμογή**: Νά εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r\cdot e^{i\theta}}$$

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι, $u(r,\theta) = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{r}$, $\upsilon(r,\theta) = -\frac{\eta\mu\theta}{r}$ καί ὅτι αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann εἰς πολικάς συντεταγμένας πληροῦνται εἰς κάθε σημεῖον z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου διαφόρου τοῦ μηδενός. Ὅθεν, ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r\cdot e^{i\theta}}$. Συμφώνως πρός τόν τύπον (14) θά ἔχωμεν:

$$f'(z) = e^{-i\theta}\cdot\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{r^2} + i\,\frac{\eta\mu\theta}{r^2}\right) = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

§6. ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΑΙ

Ἔστω $f(z)=f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ μία μιγαδική συνάρτησις τῶν δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καί y. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$ καί εἶναι συνεχεῖς. Ὡς ἐκ τούτου ὑπάρχει τό ὁλικόν διαφορικόν τῆς $f(x,y)$ καί εἶναι:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$dz=dx+idy \quad \text{καί} \quad d\bar{z}=dx-idy \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$dx=\frac{1}{2}(dz+d\bar{z}) \quad \text{καί} \quad dy=\frac{1}{2i}(dz-d\bar{z}) \qquad (2')$$

Εἰσάγοντες τάς ἐκφράσεις τῶν dx καί dy ἐκ τῶν (2′) εἰς τήν (1) λαμβάνομεν:

$$df=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z} \qquad (3)$$

Ἤδη εἰσάγομεν τούς κάτωθι διαφορικούς τελεστάς

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\cdot}{\partial z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}-i\frac{\partial\cdot}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial\cdot}{\partial \bar{z}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ἐφαρμόζοντες τούς ἀνωτέρω τελεστάς εἰς τήν συνάρτησιν f ἡ σχέσις (3) γράφεται:

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \qquad (5)$$

Ἐξ ἄλλου μέ τήν εἰσαγωγήν αὐτῶν τῶν τελεστῶν ἡ συνθήκη τῶν Cauchy–Riemann γράφεται ὑπό τήν κάτωθι ἁπλῆν μορφήν:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0} \qquad (6)$$

Ἡ ἰσότης (6) ἐκφράζει τήν ἱκανήν καί ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα μία συνάρτησις εἶναι ἀναλυτική.

Ἕνεκα τῆς (6) ἡ (5) γράφεται: $\quad df=\frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (7)$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν: $\quad df=f'(z)dz \qquad (8)$

Ὅθεν, λόγῳ τῶν (7) καί (8) ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad (9)$$

Ἐφαρμογή: Νά ἐξετασθῆ, ἐάν ἡ συνάρτησις $\arg z$ εἶναι ἀναλυτική, ὑποθέτοντες ὅτι τό z κινεῖται ἐντός τοῦ πρωτεύοντος χωρίου:

<u>*Λύσις*</u>: Παρατηροῦμεν ὅτι: (Βλ. Κεφ. IV, § 3)

$$\log z = \log|z| + i\arg z = \frac{1}{2}\log z\cdot\bar{z} + i\arg z \qquad (1)$$

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ $\log z$ εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις, **Βλ. σελ. 71 παραγωγίζοντες τήν** (1) ὡς πρός $\bar{z}$ λαμβάνομεν:

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z\bar{z}} + i\frac{\partial \arg z}{\partial \bar{z}} \quad \text{ἤ} \quad 0 = \frac{1}{2\bar{z}} + i\frac{\partial \arg z}{\partial \bar{z}}$$

$$\text{ἤ} \qquad \frac{\partial \arg z}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i\bar{z}} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) παρατηροῦμεν, ὅτι δέν πληροῦται ἡ συνθήκη (6), καί ὡς ἐκ τούτου ἡ συνάρτησις $\arg z$ δέν εἶναι ἀναλυτική.

- Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός ἑνός πεδίου D, ὡς γνωστόν θά εἶναι καί ἀπείρως παραγωγίσιμος ἐν D, καί ὡς ἐκ τούτου καί ἡ $\frac{df}{dz}$ θά εἶναι ἀναλυτική ἐν D.

Συνεπῶς θά ἔχωμεν: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = 0$ ἤ συντόμως $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}} = 0$

Ὁμοίως θά εἶναι $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0$ ἤ συντόμως $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\partial z} = 0$.

- Ἡ διαφορικοί τελεσταί οἱ διδόμενοι ὑπό τῶν τύπων (4) ἐφαρμοζόμενοι διαδοχικῶς εἰς τήν συνάρτησιν $f(z)$ δίδουν:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - i\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \qquad (10)$$

Θέτοντες $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (ὁ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ εἶναι ὁ γνωστός διαφορικός τελεστής τοῦ Laplace)

ἡ (10) γράφεται

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}} \qquad (11)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική, τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}} = 0$ καί ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν:

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0} \qquad (12)$$

Αἱ λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (12) εἶναι αἱ λεγόμεναι <u>ἁρμονικαί συναρτήσεις.</u>

Ἐπειδή $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ἡ διαφ. ἐξίσωσις (12) ἰσοδυναμεῖ μέ τάς ἐξισώσεις

$$\Delta f = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases}\Delta u = 0\\ \Delta v = 0\end{cases} \qquad (13)$$

§7 ΚΑΝΩΝ L' HOSPITAL

Θεώρημα III-7-1. Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καί $g(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί εἰς τό σημεῖον z_0 καί εἶναι $f(z_0)=g(z_0)=0$, ἐνῶ $g'(z_0)\neq 0$, τότε ἰσχύει:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καί $g(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί εἰς τό z_0, συμφώνως πρός τήν πρότασιν 1-9-2 ἔχομεν:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0)+(z-z_0)\cdot f'(z_0)+(z-z_0)\cdot R_1(z,z_0)\\ &= (z-z_0)f'(z_0)+(z-z_0)R_1(z,z_0),\ \text{ὅπου } \lim_{z\to z_0}R_1(z,z_0)=0\end{aligned}$$

Ὁμοίως: $g(z)=(z-z_0)g'(z_0)+(z-z_0)R_2(z,z_0)$, ὅπου $\lim_{z\to z_0}R_2(z-z_0)=0$

Ὅθεν, $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\{f'(z_0)+R_1(z,z_0)\}}{(z-z_0)\{g'(z_0)+R_2(z,z_0)\}}$$

$$=\frac{f'(z_0)+\lim_{z\to z_0}R_1(z,z_0)}{g'(z_0)+\lim_{z\to z_0}R_2(z,z_0)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

• **Ἐφαρμογή:** Νά ὑπολογισθῆ τό ὅριον: $\lim_{z\to 0}\frac{1-\text{συν}z}{z^2}$.

Λύσις: Εἶναι $f(z)=1-\text{συν}z$, $g(z)=z^2$ καί $f(0)=g(0)=0$.

Ἐπίσης αἱ $f(z)$ καί $g(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί εἰς τό $z=0$.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τοῦ L'Hospital ἔχομεν:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\text{συν}z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\text{ημ}z}{2z}$$

Ἐπειδή $f_1(z)=\text{ημ}z$ καί $g_1(z)=2z$ εἶναι ἀναλυτικαί καί ἴσαι πρός τό μηδέν ὅταν $z=0$, δυνάμεθα ἐκ νέου νά ἐφαρμόσωμεν τόν κανόνα τοῦ L'Hospital ὅτε ἔχομεν:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\text{ημ}z}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\text{συν}z}{2}=\frac{1}{2}$$

Ὅθεν, $$\lim_{z\to 0}\frac{1-\text{συν}z}{z^2}=\frac{1}{2}$$

§8. ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΟΥ JORDAN - ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ἔστωσαν $x(t)$ καί $y(t)$ εἶναι πραγματικαί συναρτήσεις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς t, τάς ὁποίας ὑποθέτομεν συνεχεῖς διά $t_1 \leq t \leq t_2$. Αἱ ἐξισώσεις ὡς γνωστόν, ὁρίζουν εἰς τό ἐπίπεδον oxy μίαν (συνεχῆ) καμπύλην (γ). Εἰς δέ τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ἡ παραμετρική ἐξίσωσις $z=x+iy=x(t)+iy(t)=$ $=z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ ὁρίζει τήν αὐτήν καμπύλην (γ).

Παραδείγματα: 1ον/. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διά τῶ σημείων z_1, z_2 εἶναι $z=z_1+(z_2-z_1)\cdot t$ ὅπου $t \in R$.

2ον/. Ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφερείας κέντρου z_0 καί ἀκτῖνος ρ εἶναι: $z=z_0+\rho\, e^{it}$, ὅπου $0 \leq t < 2\pi$.

Ἐάν αἱ $x(t)$, $y(t)$ ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους διά $t_1 \leq t \leq t_2$ - ὅτε καί ἡ $z(t)$ ἔχει συνεχῆ παράγωγον - καί εἶναι ἐπί πλέον $x'^2(t)+y'^2(t) \neq 0$, ὡς γνωστόν, ἡ ὁριζομένη καμπύλη καλεῖται *λεία*.

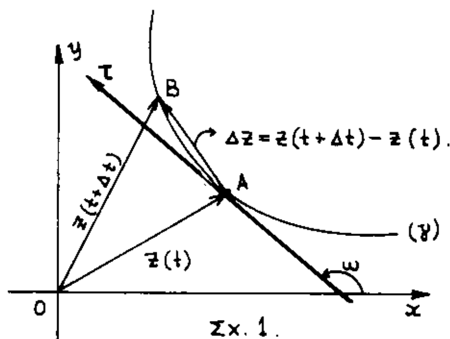
Ἡ καμπύλη C μέ ἐξίσωσιν $z=z(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ θά καλῆται ***καμπύλη τοῦ Jordan***, ἐάν διά $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, κάθε κλειστή καμπύλη τοῦ Jordan C χωρίζει τό ἐπίπεδον εἰς δύο διάφορα ἀλλήλων πεδία τά ὁποῖα ἔχουν κοινόν σύνορον τήν C καί ἐπί πλέον τό ἕνα ἐξ αὐτῶν εἶναι φραγμένον καλούμενον **ἐσωτερικόν** τῆς C καί τό ἄλλο εἶναι μή φραγμένον καλούμενον ***ἐξωτερικόν*** τῆς C.

Ἐάν $z(t)$ καί $z(t+\Delta t)$ παριστοῦν τά διανύσματα θέσεως τῶν σημείων A καί B ἀντιστοίχως (βλ. Σχ. 1), τότε ὁ λόγος:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}$$

παριστᾶ ἕνα διάνυσμα κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ $\Delta z=\overrightarrow{AB}$.



Σχ. 1.

Ἐάν τό $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz(t)}{dt}$ ὑπάρχη, τότε τό ὅριον τοῦτο εἶναι ἕνα διάνυσμα ἔστω τ, κατά τήν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς (γ) εἰς τό σημεῖον A καί δίδεται τοῦτο ὑπό τῆς σχέσεως:

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}+i\,\frac{dy(t)}{dt}.$$

τοῦτο, δηλ. τό τ καλεῖται ***ἐφαπτομενικόν διάνυσμα*** τῆς (γ) εἰς τό Α.

Ἐάν ω εἶναι τό $\arg z'(t)$, δηλ. τό ὄρισμα τοῦ ἐφαπτομενικοῦ διανύσματος τ (μέ ἄλλους λόγους ἡ γωνία τούτου μετά τοῦ ἄξονος οx), τότε θά ἔχωμεν:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \arg \Delta z.$$

ἤ ἐπειδή τοῦ $\Delta t \to 0$ καί τό $\Delta z \to 0$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται:

$$\omega = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z.$$

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις.

1. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ ὁρισμοῦ εὕρετε τήν παράγωγον ἑκάστης τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

   i). $f(z) = 3z^2 + iz - 2 + 3i$ διά $z = 1$

   ii) $f(z) = \dfrac{3z+i}{z-2i}$ διά $z = -i$

2. Ἐάν $w = f(z) = z^3 - 5z^2$ εὕρετε i) Δw, ii) dw, iii) $\Delta w - dw$.

3. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου δείξατε ὅτι αἱ κάτωθι συναρτήσεις δέν εἶναι ἀναλυτικαί διά $z \in \mathbb{C}$.

   i). $f(z) = \operatorname{Re} z$, ii). $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$, iii) $f(z) = |z|$.

4. Δι' ἐφαρμογῆς τῶν συνθηκῶν Cauchy-Riemann προσδιορίσατε ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι συναρτήσεως εἶναι ἀναλυτικαί:

   i). $f(z) = \bar{z}$, ii) $f(z) = z^3$, iii) $f(z) = z \cdot e^{\bar{z}}$.

5. Δείξατε ὅτι αἱ συναρτήσεις: $u = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$, $v = \text{τοξεφ}\, y/x$ εἶναι συζυγεῖς καί ἀκολούθως σχεδιάσατε τάς οἰκογενείας τῶν καμπύλων μέ $u =$ σταθ. καί $v =$ σταθ.

6. Κατασκευάσατε, ἐάν εἶναι δυνατόν, τήν συζυγῆ ἑκάστης τῶν κάτωθι συναρτήσεων.

   i) $u(x,y) = 2x(1-y)$ ii) $u(x,y) = x\,\text{συν}\,y - y\,\text{ημ}\,y$ iii) $u(x,y) = \sinh x \cdot \text{ημ}\,y$

   iv) $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ v) $v(x,y) = \log(x^2+y^2) + x - 2y$.

7. Ἐάν $u_1(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$ καί $u_2(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$ δείξατε ὅτι:

$$f'(z)=u_1(z,0)-iu_2(z,0).$$

8. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν μέ τύπον:

$$f(z)=\begin{cases}|z|^{-2}(1+i)\,\Im m\,z^2 & \text{διά } z\neq 0\\ 0 & \text{» } z=0\end{cases}$$

Ἐπαληθεύσατε ὅτι ἱκανοποιοῦνται αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann εἰς τό σημεῖον $z=0$. Ἡ $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τό $z=0$;

9. Ἐπαληθεύσατε ὅτι ἡ $f(z)=z\cdot Re\,z$ εἶναι διαφορίσιμος μόνον εἰς τό $z=0$.

10. Δείξατε ὅτι, τό πραγματικόν καί τό μιγαδικόν μέρος μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως μιγαδικῆς μεταβλητῆς, ὅταν ἐκφράζεται αὕτη ὑπό πολικήν μορφήν, ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0$$

(ἐξίσωσις τοῦ Laplace ὑπό πολικήν μορφήν)

11. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα πεδίον G καί ἄς θεωρήσωμεν τάς οἰκογενείας τῶν ἐπιπέδων καμπύλων $u(x,y)=c_1$ καί $v(x,y)=c_2$, ὅπου c_1 καί c_2 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Δείξατε ὅτι αἱ οἰκογένειαι αὗται εἶναι ὀρθογώνιοι. Ἀκριβέστερον δείξατε ὅτι, ἐάν $z_0=(x_0,y_0)$ εἶναι ἕνα κοινόν σημεῖον τῶν δύο καμπύλων $u(x,y)=c_1$ καί $v(x,y)=c_2$ καί ἐάν $f'(z_0)\neq 0$, τότε τά ἐφαπτομενικά διανύσματα τῶν δύο καμπύλων εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0) εἶναι κάθετα μεταξύ των.

12. Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ὅρια:

i) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\text{συν}\,z}{\etaμ z^2}$, ii) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z-\etaμ z}{z^3}$, iii) $\lim\limits_{z\to 0}(\text{συν}\,z)^{1/z^2}$

iv) $\lim\limits_{z\to m\pi i}(z-m\pi i)\left(\frac{e^z}{\etaμ z}\right)$ v) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{\etaμ z}{z}\right)^{1/z^2}$

13. Τί παριστοῦν γεωμετρικῶς αἱ κάτωθι σχέσεις :

i) $|z-z_0| < R$, ii) $|z-z_0| > R$, iii) $|z-z_0| = R$,

iv) $|z-2|+|z+2| = 5$, v) $|z-2|-|z+2| > 3$,

vi) $Re\, z \geq c$, vii) $\Im m\, z < c$, viii) $0 < Re(iz) < 1$,

ix) $a < \arg z < \beta$, x) $|z| = Re\, z + 1$, xi) $Re \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$

xii) a) $|z| < \arg z$, ἐάν $0 \leq \arg z < 2\pi$

β) $|z| < \arg z$, ἐάν $0 < \arg z \leq 2\pi$

xiii) a) $Re \frac{1}{z} = c$, β) $\Im m \frac{1}{z} = c$ $(-\infty < c < +\infty)$

xiv) a) $Re\, z^2 = c$, β) $\Im m\, z^2 = c$ $(-\infty < c < +\infty)$.

14. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐξίσωσις τῶν κάτωθι γραμμῶν:

α) Τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διά τῶν σημείων $z_1 = 2-3i$ καί $z_2 = 3+5i$.

β) Τῆς περιφερείας μέ κέντρον τό $z_0 = 5+i$ καί ἀκτῖνα $\rho = 4$.

γ) Τῆς ἐλλείψεως μέ ἑστίας τά σημεῖα $z_1 = -3$ καί $z_2 = +3$ καί μεγάλου ἄξονα 10.

15. Δείξατε ὅτι ἡ $f(z) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + i \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$ εἶναι ἀναλυτική παντοῦ ἐκτός ἀπό τόν θετικόν πραγματικόν ἄξονα καί τήν ἀρχήν.

16. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $u(r,\theta) = \log r$, εἶναι ἁρμονική εἰς τό πεδίον $r>0$, $0 < \theta < 2\pi$. Ἐν συνεχεία νά εὑρεθῆ μία ἁρμονική συζυγής v.

17. Να εὑρεθοῦν ὅλες οἱ ἁρμονικές συναρτήσεις τῆς μορφῆς:

i) $u = f(x \cdot y)$, ii) $u = f(y/x)$, iii) $u = f(x^2-y^2)$ iv) $u = f\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$,

v) $u = f(y + \sqrt{x^2+y^2})$

18. Δίδεται ἡ συνάρτησις $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Δείξατε ὅτι:

α) Ἐάν δι' ὅλα τά z ὑπάρχει τό ὅριον $\lim_{\Delta z \to 0} \left[Re \frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$, τότε αἱ μερικαί παράγωγοι u_x, v_y ὑπάρχουν καί εἶναι ἴσαι.

β) Ἐάν τό ὅριον $\lim_{\Delta z \to 0} \left[\Im m \frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$ ὑπάρχει, τότε αἱ μερικαί παράγωγοι u_y, v_x ὑπάρχουν καί εἶναι $u_y = -v_x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΛΕΙΟΤΙΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

§1 ΠΕΔΙΟΝ ΟΠΟΥ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΠΛΗ

Ὁρισμός IV-1-1. *Μία συνάρτησις $f(z)$ ὡρισμένη εἰς ἕνα πεδίον G θά λέγωμεν ὅτι εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ ἐντός τοῦ G, ἐάν αὕτη δημιουργῇ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοίχισιν μεταξύ τῶν σημείων τοῦ G καί τῶν σημείων τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν της $f(G)=E$ καί ἐπί πλέον αὕτη εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ G.*

Ἀποδεικνύεται ὅτι: *ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ ἐντός τοῦ G, τότε θά εἶναι $f'(z)\neq 0$ διά κάθε $z\in G$.*

Παραθέτομεν, ἄνευ ἀποδείξεως, τό κάτωθι θεώρημα:

Θεώρημα IV-1-1. Ἔστω ἡ συνάρτησις $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ ἐντός τοῦ πεδίου G καί ἔστω $E=f(G)$ ἡ εἰκών τοῦ G διά τῆς $f(z)$, τότε τό E εἶναι καί αὐτό ἕνα πεδίον.

Ἰσχύει καί τό κάτωθι βασικόν θεώρημα πού συνδέει τάς παραγώγους μιᾶς συναρτήσεως καί τῆς ἀντιστρόφου της.

Θεώρημα IV-1-2. Ἔστω ἡ συνάρτησις $w=f(z)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ ἐντός τοῦ G καί ἔστω $E=f(G)$ τό πεδίον τῶν τιμῶν της. Ἔστω δέ $z=\varphi(w)$ ἡ ἀντίστροφος ταύτης. Τότε ἡ $z=\varphi(w)$ εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ ἐντός τοῦ E καί ἐπί πλέον ἰσχύει:

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Ἀπόδειξις: Ἡ ἀντίστροφος $z=\varphi(w)$ ὡς ὡρίσθη εἰς τήν § 7, Κεφ. I εἶναι καί αὐτή μονότιμος καί ἀμφιμονοσήμαντος ἐντός τοῦ E, ἐπειδή ἡ $w=f(z)$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐντός τοῦ G. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι καί ἀναλυτική. Πρός τούτοις ἔστωσαν w_0 καί w δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ E καί z_0 καί z τά ἀντίστοιχα τούτων ὑπό τῆς $\varphi(w)$ ἐντός τοῦ G. Ἐπειδή ἡ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ εἶναι ἀνα-

λυτική, αἱ συναρτήσεις $u=u(x,y)$ καί $v=v(x,y)$ (1), λόγῳ τοῦ Θεωρήματος III-3-1, εἶναι συνεχεῖς καί παραγωγίσιμοι ἐντός τοῦ G.

Εἶναι δέ: $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = |f'(z)|^2 \neq 0.$

Εἰς τό σύστημα (1) ἔχομεν $u_o = u(x_o, y_o)$ καί $v_o = v(x_o, y_o)$ (2)

Ὅθεν, τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου (x_o, y_o) ἐπιλύεται μονοσημάντως ὡς πρός x καί y, ἤτοι: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ (βλ. σχετ. Τόμος Β΄ σελ. 90, θεώρημα IV-3-1) εἶναι δέ ἐπί πλέον αἱ $x=x(u,v)$ καί $y=y(u,v)$, συνεχεῖς ὡς πρός (u,v) συναρτήσεις.

Εἶναι δέ $x(u,v) = \operatorname{Re}\varphi(w)$, $y(u,v) = \operatorname{Im}\varphi(w)$, ὅθεν ἡ $z = \varphi(w)$ εἶναι συνεχής ἐν E καί ἐπομένως διά $w \to w_o$ θά ἔχωμεν $z \to \varphi(w_o) = z_o$.

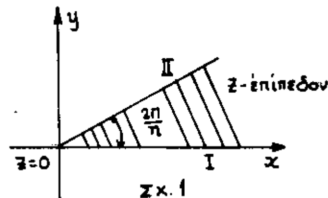
Τέλος $\varphi'(w_o) = \lim\limits_{w \to w_o} \frac{z - z_o}{w - w_o} = \lim\limits_{z \to z_o} \frac{1}{\frac{w - w_o}{z - z_o}} = \frac{1}{f'(z_o)}$, δηλ. ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς $\varphi(w)$ διά κάθε $w_o \in E$ καί δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\varphi'(w_o) = \frac{1}{f'(z_o)}.$$

§2. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $W = z^n$ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΤΗΣ $z = \sqrt[n]{w}$

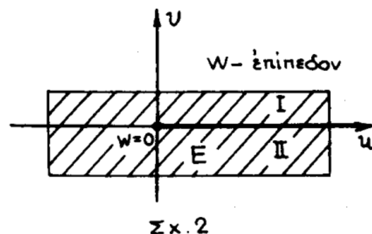
I. Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν $w = z^n$ (1), ὅπου n ἀκέραιος ἀριθμός. Διά τήν μελέτην τῶν γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων αὐτῆς καί τῆς ἀντιστρόφους της εἶναι ἀναγκαῖον νά θεωρήσωμεν τόν ἐκθετικόν συμβολισμόν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἔστω λοιπόν ὅτι δίδεται τό σημεῖον $W = r \cdot e^{i\theta}$ $(r > 0)$ τοῦ w- ἐπιπέδου. Ὡς γνωστόν, ὑπάρχουν τά διάφορα ἀλλήλων σημεῖα τοῦ z- ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων ἡ εἰκών μέσω τῆς (1) εἶναι τό σημεῖον W. Τά σημεῖα δέ ταῦτα, ὡς γνωστόν παρέχονται ὑπό τοῦ τύπου:

$$z = \sqrt[n]{r}\left\{\text{συν}\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\text{ημ}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right\} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \text{ ὅπου } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$



Τ᾽ ἀνωτέρω σημεῖα εἰς τό z- ἐπίπεδον εἶναι αἱ κορυφαί ἑνός κανονικοῦ n- πολυγώνου ἔχοντος κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων. Ὅθεν, ὅταν $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ (2) (βλ. Σχ. 1), ἡ συνάρτησις $W = z^n$ ἀπεικονίζει τόν ἀνωτέρω τομέαν (δηλ. τό κλειστόν πεδίον μετά τῶν συνόρων του) καί μέ γωνίαν κορυφῆς $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ τοῦ z-ἐπιπέδου,

εἰς τό W- ἐπίπεδον. Διάφορα ἀλλήλων ἐσωτερικά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ τομέως ἀπεικονίζονται εἰς διάφορα ἀλλήλων σημεῖα τοῦ W-ἐπιπέδου, τά δέ σύνορα I καί II τοῦ ἀνωτέρω τομέως ἀπεικονίζονται εἰς τόν θετικόν ἡμιάξονα u τοῦ W-ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 2). Οὕτω, ὁ ἀνωτέρω τομεύς ἀπεικονίζεται εἰς τό ἐπεκτεταμένον W- ἐπίπεδον τό ὁποῖον ἄς καλέσωμεν E.



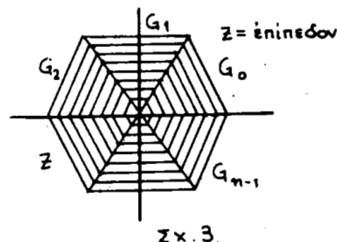
Σχ. 2

Ἡ ἀντίστροφος τῆς $w=z^n$ εἶναι ἀκριβῶς ἡ $z=\sqrt[n]{w}$ (3), δηλ. ἡ $n^{\text{στή}}$ ρίζα τοῦ w, ἡ ὁποία εἶναι μία καί μόνον, μέ πεδίον τιμῶν τόν τομέα $0<\arg z<\frac{2\pi}{n}$ τοῦ z-ἐπιπέδου.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, ἡ συνάρτησις $z=\sqrt[n]{w}$ εἶναι μονοσήμαντος ἐν E καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα IV-1-2. Οὕτω:

$$\frac{d\sqrt[n]{w}}{dw}=\frac{1}{\frac{dz^n}{dz}}=\frac{1}{n\cdot z^{n-1}}=\frac{\sqrt[n]{w}}{n\cdot w}=\frac{1}{n}\cdot w^{\frac{1}{n}-1}$$

II. Κλάδοι τῆς συναρτήσεως $z=\sqrt[n]{w}$. Ἄς θεωρήσωμεν εἰς τό z- ἐπίπεδον τάς ἀκτῖνας πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς κορυφάς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος n-κορυφάς (βλ. Σχ. 3). Ὁ τομεύς $\frac{2\pi}{n}<\arg z<\frac{4\pi}{n}$ ἀπεικονίζεται ἐπίσης εἰς τό W-ἐπίπεδον κ.τ.λ. Ὅθεν ἡ γεωμετρική εἰκών τῆς συναρτήσεως $w=z^n$ εἶναι τό W-ἐπίπεδον ἐπαναλαμβανόμενον n-φοράς. Οὕτω ἡ ἀπεικόνισις τοῦ z-ἐπιπέδου ὑπό τῆς $w=z^n$ δέν ἀντιστρέφεται ἀμφιμονοσημάντως.



Σχ. 3

Ἄν παραστήσωμεν τούς ἀνωτέρω γωνιακούς τομεῖς, ἕκαστος γωνίας $\frac{2\pi}{n}$, διά G_0, $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ ἀντιστοίχως, τότε ὁ G_k εἶναι ὁ τομεύς:

$$\frac{2k\pi}{n}<\arg z<\frac{2(k+1)\pi}{n} \quad (4) \cdot \quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω ἡ εἰκών τοῦ G_k ὑπό τῆς $w=z^n$ εἶναι τό W-ἐπίπεδον καί ἕκαστον τῶν n-πεδίων G_k, $k=0,1,2,\ldots,n-1$ ἀπεικονίζεται ὑπό τῆς $w=z^n$ εἰς τό W-ἐπίπεδον. Τά δέ σύνορα τῶν ἀνωτέρω τομέων ἀπεικονίζονται εἰς τόν θετικόν ἡμιάξονα τοῦ ἀνωτέρω W-ἐπιπέδου. Τοῦτο δικαιολογεῖται ὡς ἀκολούθως: Ἐκ τῆς (4) ἔχομεν:

$$2k\pi<n\cdot\arg z<2(k+1)\pi \qquad (5)$$

Ἐπειδή $\arg w=\arg z^n=n\cdot\arg z$, ἡ (5) γράφεται:

$$2k\pi<\arg w<2(k+1)\pi \quad (6), \quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

Ἡ (6) ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $0<\arg w<2\pi$ (7) ὅταν $k=0,1,2,\ldots,n-1$.

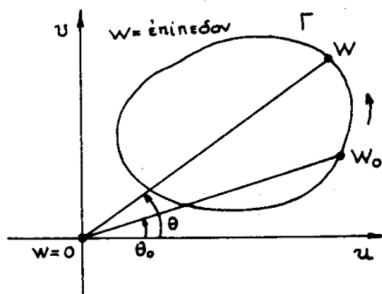
Ἐκ τῆς (7) ἕπεται τό ἀνωτέρω συμπέρασμα.

Ἡ συνάρτησις $w=z^n$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό G_k καί πεδίον τιμῶν τό W- ἐπίπεδον ἔχει μίαν μονότιμον συνάρτησιν – καί μάλιστα ἀναλυτική καί ἁπλῆ – ὡς ἀντίστροφον, μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό W- ἐπίπεδον καί πεδίον τιμῶν τό G_k. Αὐτή ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις συμβολίζεται διά τοῦ συμβόλου $z=(\sqrt[n]{w})_k$. Οὕτω ἡ συνάρτησις ἡ θεωρηθεῖσα εἰς τήν ὑπό- § I τῆς παρούσης § ἡ $z=\sqrt[n]{w}$ θά παρίσταται οὕτω $z=(\sqrt[n]{w})_o$. Ὅθεν διά $k=0,1,2,\dots,n-1$ ἔχομεν τάς n τό πλῆθος συναρτήσεις, ἤτοι τάς κάτωθι:

$$(\sqrt[n]{w})_o,\quad (\sqrt[n]{w})_1,\quad (\sqrt[n]{w})_2,\dots,\quad (\sqrt[n]{w})_{n-1} \qquad (7)$$

αἱ ὁποῖαι δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς "τμήματα" τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $z=\sqrt[n]{w}$ καί αἱ ὁποῖαι καλοῦνται $n^{\sigma\tau\alpha\iota}$ **ρίζαι** τοῦ W. Αἱ διάφοροι συναρτήσεις αἱ διδόμεναι ὑπό τῶν σχέσεων (7) καλοῦνται **κλάδοι** τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $z=\sqrt[n]{w}$.

III. <u>Κλαδικά σημεῖα</u>: Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς κάθε σημεῖον $W_o=|W_o|\cdot e^{i\theta_o}$ τοῦ W-ἐπιπέδου ἐκλέγομεν μίαν τιμήν τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $\sqrt[n]{w}$ ἀντιστοιχούσης εἰς τόν κλάδον $(\sqrt[n]{w})_k$ καί παριστωμένη ἡ τιμή ὑπό τοῦ σημείου $z_o=\sqrt[n]{|w_o|}\cdot e^{i\theta_o/n}$ ἀνήκοντος εἰς τό πεδίον G_k.

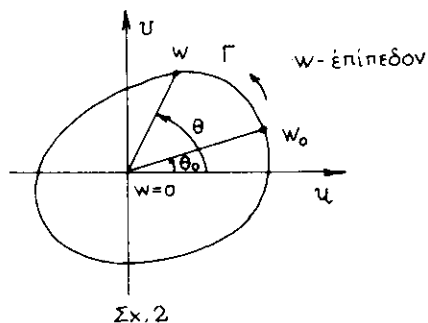


Σχ. 1

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, τό μεταβλητόν σημεῖον $W=|W|\cdot e^{i\theta}$ τοῦ W-ἐπιπέδου διαγράφει μίαν κλειστήν καμπύλην τοῦ Jordan Γ τοῦ w-ἐπιπέδου μέ ἀρχικόν καί τελικόν σημεῖον τό W_o. Τότε τό ἀντίστοιχον σημεῖον τοῦ z-ἐπιπέδου εἶναι τό $z=\sqrt[n]{|w|}\cdot e^{i\theta/n}$ **διαγράφον μίαν** καμπύλην C εἰς τό z-ἐπίπεδον. Ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο δυνατότητες:

α). Τό σημεῖον $W=0$ (δηλ. ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων) νά κεῖται ἐκτός τῆς καμπύλης Γ. Τότε καθώς διαγράφομεν τήν καμπύλην Γ, τό ὄρισμα τοῦ σημείου W μεταβάλλεται. Ἔστω ὅτι ἔχει τοῦτο ἀρχικήν τιμήν θ_o. Ὅταν τό W κινηθῆ ἐπί τῆς Γ καί ἐπανέλθη εἰς τήν ἀρχικήν του θέσιν καί τό ὄρισμα αὐτοῦ ἐπανέρχεται εἰς τήν ἀρχικήν του τιμήν θ_o (βλ. Σχ. 1). Ἐντεῦθεν αἱ τιμαί τῶν συναρτήσεων: $(\sqrt[n]{w})_o, (\sqrt[n]{w})_1, (\sqrt[n]{w})_2, \dots (\sqrt[n]{w})_{n-1}$ θά εἶναι ἴσαι πρός τάς ἀρχικάς των τιμάς εἰς τό σημεῖον $w=w_o$ καί μετά τήν διαδρομήν τῆς καμπύλης Γ.

β). Ἐάν τό σημεῖον $w=0$ κεῖται ἐντός τῆς καμπύλης Γ (βλ. Σχ. 2), τότε μία περιφορά κατά μῆκος τῆς Γ καί κατά τήν φοράν πού εἶναι ἀντίθετος πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, τότε τό θ_o αὐξάνεται ἀπό θ_o ἕως $\theta_o+2\pi$. Ἐπειδή $z=\sqrt[n]{|w|}\cdot e^{i\theta/n}$ τότε τό σημεῖον πού θ'ἀντιστοιχῆ μετά τήν (πρώτην) περιφοράν δέν θά εἶναι, ὅπως εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν,



Σχ. 2

τό z_o, ἀλλά τό σημεῖον $z_1=\sqrt[n]{|w_o|}\cdot e^{i(\theta+2\pi)/n}$, ἀλλά αὐτό εἶναι τό σημεῖον πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν κλάδον $(\sqrt[n]{w})_{\kappa+1}$, ὑπό τήν ἔννοιαν ὅτι, κάθε τιμή τῆς $\sqrt[n]{w}$ ἐπί τοῦ κλάδου $(\sqrt[n]{w})_\kappa$ ἀλλάσσει συνεχῶς **μετά** τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς τῆς $\sqrt[n]{w}$ ἐπί τοῦ κλάδου $(\sqrt[n]{w})_{\kappa+1}$.

Ἀναλόγως ἐάν ἡ διαγραφή τῆς Γ γίνεται κατά τήν φοράν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, αὕτη μεταβάλλεται ἀπό τόν κλάδον $(\sqrt[n]{w})_\kappa$ εἰς τόν κλάδον $(\sqrt[n]{w})_{\kappa-1}$. Ἐπί πλέον ἕνας πεπερασμένος ἀριθμός περιφορῶν ἐπί τῆς Γ μεταβάλλει τόν κλάδον $(\sqrt[n]{w})_\kappa$ εἰς τόν κλάδον $(\sqrt[n]{w})_\ell$. Τέλος n τό πλῆθος περιφοραί κατά μῆκος τῆς Γ καί κατά τήν αὐτήν φοράν μεταφέρουν τό σημεῖον z_o εἰς τό ἴδιον τό σημεῖον z_o καί κατά συνέπειαν μεταφέρουν κάθε κλάδον $(\sqrt[n]{w})_\kappa$ εἰς τόν ἴδιον.

Ὁρισμός IV-2-1. *Ἕνα σημεῖον z_o μιᾶς πλειοτίμου συναρτήσεως $f(z)$* ***θά καλῆται κλαδικόν, ἐάν τοῦτο ἔχῃ τήν ἰδιότητα: Μία ἁπλῆ περιφορά κάθε κλειστῆς καμπύλης τοῦ Jordan, ἡ ὁποία ἔχει τό z_o εἰς τό ἐσωτερικόν της*** (συντόμως "περιφορά πέριξ τοῦ z_o") ***μεταφέρει κάθε κλάδον τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως εἰς ἕναν ἄλλον κλάδον αὐτῆς.***

Ἐάν ἕνας πεπερασμένος ἀριθμός διαγραφῶν, ἔστω n, πέριξ τοῦ z_o, κατά τήν αὐτήν φοράν, μεταφέρει ἕναν κλάδον τῆς συναρτήσεως εἰς τόν ἴδιον, τότε τό κλαδικόν σημεῖον z_o καλεῖται ***πεπερασμένης τάξεως κλαδικόν σημεῖον*** καί μάλιστα $n-1$ τάξεως.

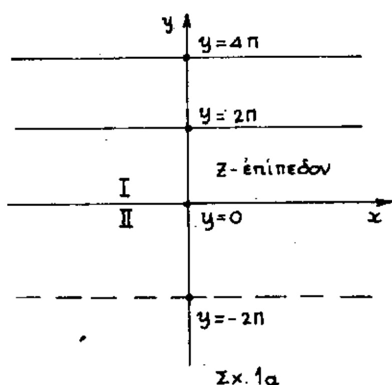
Συμφώνως πρός τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν τό $w=0$ εἶναι κλαδικόν σημεῖον τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $z=\sqrt[n]{w}$ καί μάλιστα $n-1$ τάξεως.

Ἐπειδή μία πλήρης περιστροφή κατά τήν ἀντίθετον φοράν πέριξ τοῦ σημείου $w=0$

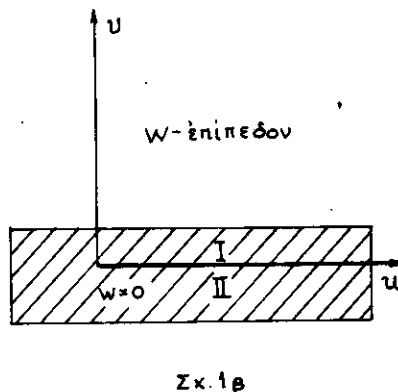
εἶναι ἐπίσης μία πλήρης περιστροφή πέριξ τοῦ σημείου $w=\infty$ καί τό σημεῖον αὐτό εἶναι ἕνα κλαδικόν σημεῖον τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως.
Ἄλλα κλαδικά σημεῖα τῆς $z=\sqrt[n]{w}$ δέν ὑπάρχουν (διατί;).

§3. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $w=e^z$ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΤΗΣ $z=\log w$.

I. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $w=e^z$ (1). Ἔστω $z=x+iy$, ὅτε $w=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις εἰς κάθε μιγαδικόν ἀριθμόν $z=x+iy$ ἀντιστοιχεῖ ἕναν μιγαδικόν ἀριθμόν τοῦ ὁποίου τό μέτρον εἶναι ὁ ἀριθμός e^x καί τό ὄρισμα εἶναι y. (διότι τό ὄρισμα τοῦ e^{iy} εἶναι y) Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ἡ (εὐθεῖα) γραμμή $y=y_o$ τοῦ z-ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται εἰς μίαν γραμμήν τοῦ w-ἐπιπέδου ἡ ὁποία ἔχει σταθερόν ὄρισμα ἴσον πρός y_o καί τοιαύτη γραμμή εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διά τῆς ἀρχῆς (αὐτῆς) τοιαύτη, ὥστε $\arg w=y_o$.



Σχ. 1α



Σχ. 1β

Ὅπως εἶναι εὔκολον νά ἴδωμεν ἡ λωρίς (I) τοῦ z-ἐπιπέδου φρασσομένη ὑπό τῶν εὐθειῶν $y=0$ καί $y=2\pi$ θά ἀπεικονίζεται εἰς τό ἐπεκτεταμένο w-ἐπίπεδον καί τά σύνορα τοῦ ἀνωτέρω χωρίου (λωρίδος) δηλ. αἱ εὐθεῖαι $y=0$ καί $y=2\pi$ ἀπεικονίζονται εἰς τόν θετικόν ἡμιάξονα $u\geq 0$ τοῦ w-ἐπιπέδου. Οὕτω μεταξύ τοῦ πεδίου $0\leq y<2\pi$ καί τοῦ w-ἐπιπέδου ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία· κατά συνέπειαν ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως $w=e^z$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ εἰς τό w-ἐπίπεδον καί τήν ὁποίαν θά παριστῶμεν οὕτω:

$$z=\log w \qquad (2)$$

Ἡ συνάρτησις (2) ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τό ἐπεκτεταμένον w-ἐπίπεδον ἐξαιρέσει τῶν σημείων $w+|w|=0$ καί πεδίον τιμῶν τό πεδίον τοῦ z-ἐπιπέδου, τό ὁριζόμενον ὑπό τῆς σχέσεως $0\leq y<2\pi$.

Αὔτη δέ καλεῖται ***λογάριθμος*** τοῦ W, διά τ'ἀνωτέρω πεδία ὁρισμοῦ καί τιμῶν.

Ἐάν καλέσωμεν $\theta = \arg W$ ὅπου $0 \leq \theta < 2\pi$, τότε διά $W \neq 0$ ἡ (1) γράφεται

$$e^x \{\text{συν}y + i\text{ημ}y\} = |W| \cdot \{\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta\} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$e^x = |W| \text{ καί } y = \theta \text{ ἤ } x = \log|W| \text{ καί } y = \theta.$$

Ὅθεν, $z = x + iy = \log|W| + i\cdot\theta$

Ὥστε

$$\boxed{z = \log W = \log|W| + i\theta} \qquad (4) \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Παρατηροῦμεν δέ ὅτι, $\Im m z = \theta = \arg W$.

Ἡ ἀντίστροφος λοιπόν τῆς (1) δίδεται ὑπό τῆς (4) ὅπου, ὡς πεδίον τιμῶν τοῦ z εἶναι ἡ λωρίς $0 \leq y < 2\pi$, ἐπί πλέον δέ αὕτη εἶναι μία ἀναλυτική καί ἁπλῆ συνάρτησις: Συμφώνως πρός τό θεώρημα IV – 1 – 2 ἡ παράγωγος ταύτης εἶναι:

$$\frac{d\log W}{dW} = \frac{1}{\frac{de^z}{dz}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{W}.$$

Ἐάν δέν θέσωμεν τόν περιορισμόν $0 \leq y < 2\pi$, ἐκ τῆς σχέσεως (3) λαμβάνομεν:

$$e^x = |W| \text{ καί } y = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Οὕτω: $z = x + iy = \log|W| + i\cdot\{\theta + 2k\pi\}$ ἤ

$$z = \log|W| + i\cdot\arg W \quad (5), \text{ ὅπου } \arg W = \theta + 2k\pi.$$

Ἡ συνάρτησις ἡ ὁριζομένη ὑπό τοῦ (5) καλεῖται ***λογάριθμος*** τῆς W καί συμβολίζεται μέ $\log W$.

Ὥστε:

$$\boxed{\log W = \log|W| + i\cdot\arg W} \qquad (6)$$

Ὁ λογάριθμος λοιπόν εἶναι μία *πλειότιμος* συνάρτησις – εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν μέ ἀπείρους (ἀριθμησίμους) τιμάς.

Εἰς τήν (6) τό $\arg W = \theta + 2k\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ὅπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ὅθεν ἔχομεν:

$$\boxed{\log W = \log|W| + i\theta + i\cdot 2k\pi} \qquad (7)$$

Τήν τιμήν ὅπου λαμβάνομεν διά $k = 0$ καλοῦμεν ***πρωτεύουσα τιμήν ἤ πρωτεύοντα κλάδον*** τῆς $z = \log W$, ἤτοι ἡ πρωτεύουσα τιμή εἶναι ἡ διδομένη ὑπό τοῦ τύπου (4).

Βάσει τοῦ τύπου (6) δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τούς λογαρίθμους πάντων τῶν ἀριθμῶν πραγματικῶν καί μιγαδικῶν. Οὕτω:

$$\log(-1) = \log 1 + i\arg(-1) + i\cdot 2k\pi = (1+2k)\,\pi\cdot i,\ \ k=0\pm1,\pm 2,\dots$$

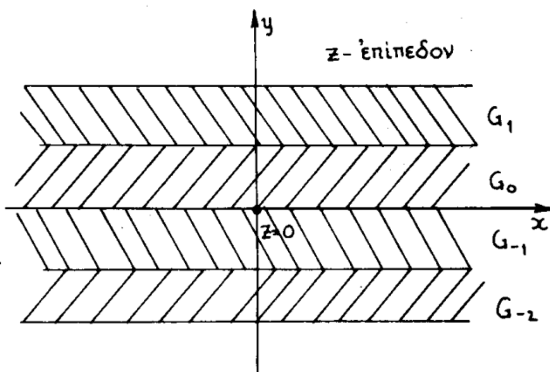
$$\log(i) = \log|i| + i\cdot\arg i + i\cdot 2k\pi = \log 1 + i\cdot\frac{\pi}{2} + i\cdot 2k\pi = \left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi\cdot i,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

I. Κλάδοι τῆς συναρτήσεως $\log w$: Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν $w=e^z$. Παρατηροῦμεν ὅτι: $e^{z+i\cdot 2k\pi} = e^z\cdot e^{i\cdot 2k\pi} = e^z\cdot 1 = e^z = w$.

Ἄς παραστήσωμεν μέ $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2},\dots$ ἀντιστοίχως τά πεδία (λωρίδας) G_k (βλ. Σχ. 3) ὅπου ταῦτα ὁρίζονται ὑπό τῆς ἀνισότητος.

G_k: $2k\pi < \Im z < 2(k+1)\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Ἡ εἰκών ὑπό τῆς $W=e^z$ ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω πεδίων G_k εἶναι τό αὐτό πεδίον καί μάλιστα τό ἐπεκτεταμένον w-ἐπίπεδον.



Σχ. 3

Ἡ συνάρτησις $w=e^z$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό G_k καί πεδίον τιμῶν τό w-ἐπίπεδον ἔχει μίαν μονότιμον ἀντίστροφον ἡ ὁποία ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τό w-ἐπίπεδον καί πεδίον τιμῶν τό G_k. Αὕτη ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ εἰς τό W-ἐπίπεδον καί θά συμβολίζεται οὕτω: $z=(\log w)_k$ ὅπου $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Εὐκόλως διαπιστοῦται, ὡς ἐμφαίνεται καί ἐκ τοῦ Σχ. 3, ὅτι: $z=(\log W)_k = (\log W)_0 + i\cdot 2k\pi$.

Εἶναι ὅμως: $(\log W)_0 = \log|W| + i\cdot\theta$, ὅπου $0\leq\theta<2\pi$.

Συνεπῶς: $z=(\log W)_k = \log|W| + i(\theta+2k\pi)$.

Οὕτω δι' ἑκάστην τιμήν τοῦ $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ ἔχομεν καί μίαν μονότιμον συνάρτησιν μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό w-ἐπίπεδον καί πεδίων τιμῶν τό G_k. Αἱ συναρτήσεις αὗται δηλ. αἱ

$$(\log w)_0,\ (\log w)_1,\ (\log w)_{-1},\ (\log w)_2,\ (\log w)_{-2},\dots$$

καλοῦνται ***κλάδοι*** τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $z=\log W$ καί ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι μία ἀναλυτική καί ἁπλῆ συνάρτησις καί ὡς ἐκ τούτου ἰσχύει τό θεώρημα IV-1-2.

II. Κλαδικά σημεῖα τῆς $z=\log W$. Ἔστω τό σημεῖον $W_0=|W_0|e^{i\theta_0}$ τοῦ W-ἐπιπέδου. Ἐκλέγομεν μίαν τιμήν τοῦ $\log W$ ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τόν κλάδον $(\log w)_k$ καί παριστωμένη

ὑπό τοῦ σημείου $z_0 = \log|w_0| + i\cdot\theta_0$ ἀνήκουσα εἰς τό πεδίον (λωρίδα) G_k

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τό σημεῖον $w=|w|\cdot e^{i\theta}$ διαγράφει μίαν κλειστήν καμπύλην τοῦ Jordan Γ εἰς τό w-ἐπίπεδον μέ ἀρχικόν καί τελικόν σημεῖον τό w_0. Τότε τό ἀντίστοιχον σημεῖον, ἤτοι τό $z=\log|w|+i\cdot\theta$ διαγράφει ἐπί τοῦ z-ἐπιπέδου μίαν κλειστήν καμπύλην γραμμή C. Ἐάν τό σημεῖον $w=0$ κεῖται ἐντός τῆς καμπύλης Γ, τότε μία περιφορά πέριξ τῆς Γ κατά φοράν ἀντίθετον πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ὁ κλάδος $(\log w)_k$ μεταφέρεται εἰς τόν κλάδον $(\log w)_{k+1}$ διότι, $\log w = \log|w| + i\,(\theta+2k\pi)$.

Ἐάν ἡ περιφορά πέριξ τῆς Γ γίνῃ κατά τήν φοράν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου, τότε ὁ κλάδος $(\log w)_k$ μεταφέρεται εἰς τόν κλάδον $(\log w)_{k-1}$. Ὅθεν, τό σημεῖον $w=0$ εἶναι ἕνα κλαδικόν σημεῖον. Ὁμοίως τό $w=\infty$ εἶναι ἕνα ἄλλο κλαδικόν σημεῖον. Ἡ ἐξήγησις εἶναι ἀνάλογη πρός αὐτήν πού ἐδώσαμεν διά τό ἴδιον σημεῖον εἰς τήν συνάρτησιν $\sqrt[n]{w}$.

Ἐπειδή
$$(\log w)_k \longrightarrow (\log w)_{k+1} \longrightarrow (\log w)_{k+2} \longrightarrow \cdots$$
$$(\log w)_k \longrightarrow (\log w)_{k-1} \longrightarrow (\log w)_{k-2} \longrightarrow \cdots$$
τά σημεῖα 0 καί ∞ δέν εἶναι πεπερασμένης τάξεως, δι᾽αὐτόν τόν λόγον τά κλαδικά αὐτά σημεῖα καλοῦνται ***λογαριθμικά*** ἤ καί ***ὑπερβατικά*** ἐν ἀντιθέσει πρός τά κλαδικά τῆς $\sqrt[n]{w}$, τά ὁποῖα καλοῦνται ***ἀλγεβρικά***.

§4. ΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ a^z ΚΑΙ z^a.

I. Ἡ συνάρτησις a^z Ἐάν ὁ a εἶναι θετικός ἀριθμός καί ὁ z φυσικός ἀριθμός, εἶναι γνωστόν ὅτι: $\log a^z = z\cdot\log a$. Ὅθεν εἶναι φυσικόν νά ὁρίσωμεν τήν συνάρτησιν:
$$\boxed{a^z = e^{z\cdot\log a}} \quad (1) \quad \text{ὅπου } a\neq 0$$
Ὁ a εἶναι μιγαδικός ἀριθμός καί ὁ z μιγαδική μεταβλητή.

Ἡ συνάρτησις $f(z)=a^z$ εἶναι πλειότιμος καθ᾽ὅτι ἡ $\log a$ εἶναι πλειότιμος συνάρτησις. Εἰς κάθε πεδίον ὅπου αὐτή εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ ἔχομεν:
$$(a^z)' = (e^{z\cdot\log a})' = e^{z\cdot\log a}\cdot\log a = a^z\log a.$$

II. Ἡ συνάρτησις z^a Δυνάμεθα νά ἐναλλάξωμεν τούς ρόλους τῶν a καί z καί

οὕτω νά ὁρίσωμεν τήν συνάρτησιν z^a ὡς ἀκολούθως:

$$\boxed{z^a = e^{a\cdot \log z}} \quad (2) \quad \text{ὅπου } z+|z| \neq 0.$$

Ἡ (2) εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις καί ἐάν θεωρήσωμεν ἕναν κλάδον τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $\log z$, ἡ z^a εἶναι ***ἀναλυτική καί ἁπλῆ*** εἰς αὐτόν, καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ἔχωμεν:

$$(z^a)' = (e^{a\cdot \log z})' = e^{a\cdot \log z}\cdot (a\cdot \log z)' = z^a\cdot a\cdot \frac{1}{z} = a\cdot z^{a-1}.$$

<u>Ἐφαρμογή</u>: Νά ὑπολογισθῆ τό i^i

<u>Λύσις</u>: Εἶναι $i^i = e^{i\log i} = e^{i\{\log|i| + i\frac{\pi}{2} + i2k\pi\}} = e^{i\{0 + i\frac{\pi}{2} + i\cdot 2k\pi\}} = e^{-\{1+4k\}\frac{\pi}{2}}$.

Διά $k=0$ ἔχομεν: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

§5. <u>ΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Ι. <u>Ἡ συνάρτησις τοξημw.</u> Ἄς καλέσωμεν G_k, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ τήν λωρίδα τοῦ z-ἐπιπέδου ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό τῆς ἀνισότητος:

$$G_k:\ (k-\tfrac{1}{2})\pi < \operatorname{Re} z < (k+\tfrac{1}{2})\cdot\pi$$

Ἡ συνάρτησις $w = \text{ημ} z$ (1) ἀπεικονίζει πάσας τάς λωρίδας $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2}, \dots$ εἰς τό αὐτό πεδίον E πού εἶναι τό w-ἐπίπεδον ἐφ' ὅσον ἐξ αὐτοῦ ἀφαιρέσομεν τά διαστήματα $(-\infty,-1)$ καί $(1,+\infty)$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος. Διότι διά w πραγματικόν, διά νά ἔχῃ ἔννοια ἡ ἐξίσωσις $w=\text{ημ}z$ θά πρέπει νά εἶναι $|w|\leq 1$. Οὕτω ἡ συνάρτησις $w=\text{ημ}z$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό G_k καί πεδίον τιμῶν τό E ἔχει μίαν μόνον ἀντίστροφον μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό E καί πεδίον τιμῶν τό G_k. Ἡ ἀντίστροφος αὐτή συμβολίζεται οὕτω:

$$\boxed{z = (\text{τοξημ} w)_k} \quad (2) \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Ἡ συνάρτησις ἡ ὁριζομένη ὑπό τῆς (2) εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ καί τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος εἶναι:

$$\frac{d(\text{τοξημ}w)_k}{dw} = \frac{1}{\frac{d\,\text{ημ}z}{dz}} = \frac{1}{\text{συν}z} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \quad k=0,\pm1,\pm2\dots$$

Ἄς θεωρήσωμεν τήν (1) καί ἄς ἀντικαταστήσωμεν: $\text{ημ}z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, τότε ἡ (1) γίνεται:

$$e^{2iz} - 2iw\cdot e^{iz} - 1 = 0 \qquad (3)$$

Ἡ (3), θεωρουμένη ὡς μία δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις μέ ἄγνωστον τόν e^{iz}, ἐπι-

δέχεται δύο λύσεις. Ἡ μία λύσις τῆς (3) εἶναι ἡ κάτωθι:

$$e^{iz} = iw + \sqrt{1-w^2} \qquad (4)$$

Ἡ ἄλλη λύσις $e^{iz} = iw - \sqrt{1-w^2}$ παραλείπεται, ἐπειδὴ τό $\pm\sqrt{1-w^2}$ συνεπάγεται ἕν τοῦ $\sqrt{1-w^2}$.

Συνεπῶς ἡ λύσις τῆς (1) εἶναι ἡ διδομένη ὑπό τοῦ τύπου:

$$z = \frac{1}{i}\log(iw + \sqrt{1-w^2}) \qquad (5)$$

Ἡ συνάρτησις αὐτη καλεῖται ***ἀντίστροφος συνάρτησις τοῦ ἡμιτόνου*** καί συμβολίζεται μέ τοξημw. Ὅθεν:

$$z = \text{τοξημ}w = \frac{1}{i}\log(iw + \sqrt{1-w^2}) \qquad (5')$$

Αὕτη εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό ἀνωτέρω ὁρισθέν πεδίον E τοῦ W-ἐπιπέδου καί πεδία τιμῶν τάς λωρίδας G_k.

Παραλείποντες τήν σταθεράν $2k\pi i$ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν λογάριθμον, ὁ τύπος (5') μᾶς δίδει τότε τόν πρωτεύοντα κλάδον τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως τοῦ ἡμιτόνου.

Ἡ συνάρτησις τοξημw ἔχει τρία κλαδικά σημεῖα τό λογαριθμικόν, $w=\infty$ καί τά $z=1$ καί $z=-1$ κλαδικά πρώτης τάξεως (ἀλγεβρικά) (διατί;).

II. Ἡ συνάρτησις τοξσυνw. Κατά τρόπον ἀνάλογον πρός τόν προηγούμενον ὁρίζομεν τήν ἀντίστροφον τῆς συναρτήσεως $w = \text{συν}\, z$. Αὕτη εἶναι ἡ πλειότιμος συνάρτησις ἡ ὁποία δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\text{τοξσυν}w = \frac{1}{i}\log(w + i\sqrt{1-w^2}) \qquad (6)$$

Παραλείποντες τήν σταθεράν $2k\pi i$ εἰς τόν λογάριθμον τοῦ τύπου (6) ἔχομεν τόν πρωτεύοντα κλάδον τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως τοῦ συνημιτόνου.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις εἶναι ἀναλυτική εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον, ἐφ' ὅσον ἐκ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τά τμήματα ἀπό $-\infty$ ἕως -1 καί ἀπό $+1$ ἕως $+\infty$.

III. Ἡ συνάρτησις τοξεφw. Κατ' ἀναλογίαν πρός τά λεχθέντα διά τήν συνάρτησιν τοξημw δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν τήν πλειότιμον συνάρτησιν τοξεφw. Ἄς καλέσωμεν G_k, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ τήν λωρίδα τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό τῆς ἀνισότητος:

$$G_k: \left(k-\tfrac{1}{2}\right)\pi < \text{Re}\, z < \left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi$$

Ἡ συνάρτησις $w = \text{εφ}\, z$ (1) ἀπεικονίζει πάσας τάς λωρίδας $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2}, \ldots$ εἰς τό αὐτό πεδίον E πού εἶναι τό w-ἐπίπεδον ἐφ' ὅσον ἐξ αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τά διαστή-

ματα τοῦ μιγαδικοῦ ἄξονος ἀπό $-\infty i$ ἕως $-i$ καί ἀπό i ἕως ∞i.

Οὕτω ἡ συνάρτησις $w=\varepsilon\varphi z$ μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό G_k καί πεδίον τιμῶν τό E ἔχει μίαν μόνον ἀντίστροφον μέ πεδίον ὁρισμοῦ τό E καί πεδίον τιμῶν τό G_k. Ἡ ἀντίστροφος αὕτη συμβολίζεται οὕτω:

$$z=(\tau o\xi\ \varepsilon\varphi\ w)_k \quad (2), \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Ἡ συνάρτησις ἡ ὁριζομένη ὑπό τῆς (2) εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ καί τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος εἶναι:

$$\frac{d(\tau o\xi\varepsilon\varphi w)_k}{dw}=\frac{1}{\dfrac{d\,\varepsilon\varphi z}{dz}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 z}}=\sigma\upsilon\nu^2 z \quad \text{ἤ} \quad \frac{d(\tau o\xi\varepsilon\varphi w)_k}{dw}=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 z}=\frac{1}{1+w^2} \qquad (3)$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\varepsilon\varphi z=w$, ὅταν τό w εἶναι δοθείς ἀριθμός, εὑρίσκεται ἀπό τήν σχέσιν:

$$w=\frac{\eta\mu z}{\sigma\upsilon\nu z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=-i\,\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} \quad \text{ἤ} \quad e^{2iz}=\frac{1+i\cdot w}{1-i\cdot w} \qquad (4)$$

Ἐντεῦθεν, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $w\neq\pm i$ ἡ λύσις τῆς (4) εἶναι ἡ κάτωθι:

$$z=\frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw} \qquad (5)$$

Ἡ συνάρτησις ἡ διδομένη ὑπό τῆς (5) καλεῖται ***ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἐφαπτομένης*** καί συμβολίζεται μέ τοξεφw. Ὅθεν:

$$z=\tau o\xi\varepsilon\varphi w=\frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw} \qquad (5')$$

Παραλείποντες τήν σταθεράν $2k\pi i$ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν λογάριθμον ὁ τύπος (5') μᾶς δίδει τόν πρωτεύοντα κλάδον τῆς ἀντιστρόφου συναρτήσεως τῆς ἐφαπτομένης. Αὕτη εἶναι ἀναλυτική εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον, ἐφ' ὅσον ἔχομεν ἀποκόψει ἀπό τόν φανταστικόν ἄξονα τά τμήματα ἀπό $-\infty i$ ἕως $-i$ καί ἀπό i ἕως ∞i.

§6. ΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κατ' ἕναν ἀνάλογον τρόπον πρός τάς ἀντιστρόφους τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων δυνάμεθα νά εἰσαγάγωμεν τάς ἀντιστρόφους τῶν ὑπερβολικῶν συναρτήσεων.

Κατ' ἀρχάς ἄς θεωρήσωμεν τήν ἐξίσωσιν:

$$w=\sinh z \qquad (1)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν ἐξίσωσιν

$$e^{2z} - 2we^{z} - 1 = 0$$

καί ἡ ὁποία ἔχει μίαν μερικήν λύσιν τήν

$$z = \log\left(w + \sqrt{w^2+1}\right) \qquad (2)$$

Οὕτω δημιουργεῖται μία νέα συνάρτησις καί τήν ὁποίαν θά συμβολίζωμεν οὕτω: **arsinhw** καλουμένη (πρωτεύουσα) ***ἀντίστροφος συνάρτησις τοῦ ὑπερβολικοῦ ἡμιτόνου*** καί ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική εἰς τό αὐτό χωρίον τοῦ w-ἐπιπέδου ὅπως καί ἡ τοξ εφ w. Ὁ (2) λοιπόν γράφεται:

$$\boxed{\operatorname{arsinh} w = \log\left(w + \sqrt{w^2+1}\right)} \qquad (2')$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν:

$$\boxed{\operatorname{arcosh} w = \log\left(w + \sqrt{w^2-1}\right)} \qquad (3)$$

καλουμένη (πρωτεύουσα) ***ἀντίστροφος συνάρτησις τοῦ ὑπερβολικοῦ συνημιτόνου***

Τέλος ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$w = \tanh z \qquad (4)$$

λαμβάνομεν τήν λύσιν:

$$e^{2z} = \frac{1+w}{1-w} \qquad (5)$$

Μία μερική λύσις τῆς (5) εἶναι ἡ κάτωθι:

$$z = \frac{1}{2} \log\frac{1+w}{1-w} \qquad (5')$$

Οὕτω δημιουργεῖται μία νέα συνάρτησις καί τήν ὁποίαν θά συμβολίζωμεν οὕτω: **artanhw** καλουμένη (πρωτεύουσα) ***ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ὑπερβολικῆς ἐφαπτομένης***. Ὁ (5') γράφεται:

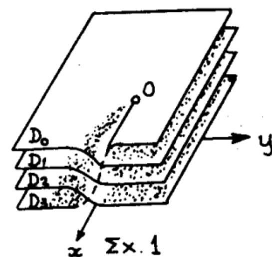
$$\boxed{\operatorname{artanh} w = \frac{1}{2} \log\frac{1+w}{1-w}} \qquad (6)$$

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις εἶναι ἀναλυτική εἰς τό αὐτό χωρίον τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου εἰς τό ὁποῖον εἶναι καί ἡ συνάρτησις τοξ εφw.

Παρατήρησις: Εἰδικῶς εἰς αὐτήν τήν § περιορίσθημεν νά ὁρίσωμεν τούς πρωτεύοντας κλάδους τῶν ἀντιστρόφων τῶν συναρτήσεων $w=\sinh z$, $w=\cosh z$, $w=\tanh z$ καί οὕτω ἐπετύχαμεν μονοτίμους συναρτήσεις. Γενικῶς δέ αἱ ἀντίστροφοι τῶν ἀνωτέρω συναρτήσεων εἶναι καί ἐδῶ προφανῶς πλειότιμοι συναρτήσεις

§7. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ RIEMANN

Μία ἐπιφάνεια τοῦ Riemann εἶναι μία γενίκευσις τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου εἰς μίαν ἐπιφάνειαν ἀποτελουμένη ἀπό περισσότερα ἀπό ἕνα "φύλλα". Τοιαύτη ὥστε μία πλειότιμος συνάρτησις νά ἔχη μίαν μόνον τιμήν ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας. Μία τοιαύτη ἐπιφάνεια θεωρεῖται διαιρημένη εἰς φύλλα διά μίαν δοθεῖσαν πλειότιμον συνάρτησιν, ἡ δέ συνάρτησις εἶναι μονότιμος πλέον ἐπί τῆς ἐπιφανείας καί οὕτω δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τήν θεωρίαν τῶν μονοτίμων συναρτήσεων. Ὡς παράδειγμα ἄς λάβωμεν τήν πλειότιμον συνάρτησιν $W=\sqrt[n]{z}$ πού ἐξετάσαμεν εἰς τήν §2. Πρός τούτοις λαμβάνομεν ὡς φύλλον D_k τῆς ἐπιφανείας τό ἐπίπεδον τό ὁποῖον θεωρεῖται τεμνόμενον κατά μῆκος τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος. Οὕτω τό D_k ὁρίζεται ὑπό τῆς σχέσεως $2k\pi < \arg z < 2(k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ (βλ. Σχ.1). Λαμβάνομεν δέ ὡς ἀρχικόν πεδίον D_0 τό πεδίον τοῦ κλάδου $f_0(z)$ τῆς συναρτήσεως ὁριζόμενον (τό πεδίον) ὑπό τῆς συνθήκης $0<\arg z<2\pi$ καί ἀκολούθως θεωροῦμεν τούς κλάδους $f_1(z),\dots,f_{n-1}(z)$ τῆς συναρτήσεως πού λαμβάνουν τάς τιμάς των εἰς τά πεδία $D_1,\dots,D_{n-1}$. Ἀκολούθως θεωροῦμεν n ἀνάτυπα φύλλων ἔχοντα τό αὐτό σχῆμα μέ τό D_k καί "συγκολλῶμεν" τό κάτω ἄκρον τῆς "σχισμῆς" τοῦ πεδίου D_0 (βλ. §2) – ἡ σχισμή τοῦ ἐπιπέδου θεωρεῖται κατά μῆκος τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x – μέ τό ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ πεδίου D_1, ἀκολούθως τό κάτω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ πεδίου D_1 μέ τό ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ πεδίου D_2 κ.ο.κ. Αἱ τιμαί τῶν $f_0(z)$ καί $f_n(z)$ ἐπί τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος (καί ἐντός τῶν πεδίων $D_n = D_0$) συμπίπτουν. Κατά συνέπειαν ἔχομεν νά συγκολλήσωμεν τό ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ φύλλου D_0 μέ τό κάτω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ D_{n-1}.



Σχ. 1

Αἱ τιμαί τῆς $\sqrt[n]{z}$ εἰς τά ἄλλα πεδία D_k δέν εἶναι τίποτε ἄλλο ἤ μή ἐπανάληψις τῶν τιμῶν τῶν κλάδων $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$.

Ὅθεν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Riemann εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἀποτελεῖται ἀπό n-φύλλα (βλ. Σχ.1). Αὐτή ἔχει ὡς ἐλέχθη καί εἰς τήν §2 τά

$z=0$ καί $z=\infty$ κλαδικά σημεῖα.

§8. <u>ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ</u>

I. <u>Ὁμαλά σημεῖα</u>. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική εἰς τό σημεῖον $z_0 \neq \infty$ (δηλ. εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου z_0). Τότε τό σημεῖον τοῦτο θά καλεῖται *ὁμαλόν σημεῖον* τῆς $f(z)$.

Μία συνάρτησις θά καλεῖται *ὁμαλή* ἐντός ἑνός συνόλου, ἐάν πάντα τά σημεῖα τοῦ συνόλου ὁρισμοῦ της εἶναι ὁμαλά.

Μία συνάρτησις $f(z)$ θά καλῆται *ὁμαλή εἰς τό σημεῖον* $z=\infty$, ἐάν ἡ συνάρτησις $\varphi(z)=f(1/z)$ εἶναι ὁμαλή εἰς τό σημεῖον $z=0$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

<u>Ἐντός ἑνός ἀρκούντως μικροῦ κύκλου πέριξ ἑνός ὁμαλοῦ σημείου z_0 τῆς $f(z)$ αὕτη ἔχει τήν κατά Taylor ἔκφρασιν, ἤτοι:</u>

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (1)$$

Ἐάν τό $z=\infty$ εἶναι ὁμαλόν σημεῖον τῆς $f(z)$, τότε ἡ $\varphi(z)=f(1/z)$ δύναται ν' ἀναπτυχθῆ πέριξ τοῦ μηδενός εἰς μίαν δυναμοσειράν καί κατ' ἀκολουθίαν ἡ $f(z)$ ἔχει τήν ἔκφασιν:

$$f(z)=\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{-n} \qquad (2)$$

Ἡ (2) συγκλίνει δι' ἀρκούντως μεγάλας τιμάς τοῦ $|z|$, δηλ. εἰς μίαν περιοχήν τοῦ $z=\infty$

II. <u>Μηδενίζοντα σημεῖα</u>. Ἕνα σημεῖον z_0 θά καλῆται *μηδενίζον* τήν $f(z)$, ἐάν $f(z_0)=0$.

Ἐάν $f(z)=(z-z_0)^n \cdot \varphi(z)$, ὅπου $\varphi(z_0)\neq 0$ καί ὁ n εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός, τότε τό σημεῖον z_0 καλεῖται *μηδενίζον πολλαπλότητος* n *τῆς* $f(z)$. Ἐάν $n=1$ τό z_0 θά καλῆται *μηδενίζον πολλαπλότητος ἕνα*.[1)]

Θά λέγωμεν ὅτι, τό $z=\infty$ εἶναι μηδενίζον τῆς $f(z)$, ἐάν τό $z=0$ εἶναι μηδενίζον τῆς $\varphi(z)=f(1/z)$. Ἐάν n εἶναι ἡ τάξις τοῦ μηδενίζοντος σημείου, τότε θά ἔχωμεν:

$$f\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi(z)=z^n \cdot P(z) \quad (1), \quad P(0)\neq 0$$

ὅπου ἡ $P(z)$ εἶναι ὁμαλή εἰς τό $z=0$.

---

1) *Ἕνα μηδενίζον σημεῖον δέν εἶναι τίποτ' ἄλλο παρά ἡ* <u>*ρίζα*</u> *τῆς* $f(z)=0$.

Ὅθεν, $f(z) = z^{-n} \cdot g(z)$, $g(\infty) \neq 0$,

ὅπου ἡ $g(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό $z=\infty$.

π.χ. τῆς συναρτήσεως $f(z)=$ ημz τά μηδενίζοντα σημεῖα εἶναι οἱ ἀριθμοί $k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

III. <u>Πόλοι</u>. Ἐάν ὑπάρχη ἕνας θετικός ἀκέραιος n τοιοῦτος, ὥστε: $f(z)=(z-z_0)^{-n}\cdot\varphi(z)$, μέ $\varphi(z_0)\neq 0$, τότε τό $z=z_0$ καλεῖται *πόλος n- τάξεως*. Διά $n=1$ τό σημεῖον $z=z_0$ καλεῖται *ἁπλός πόλος*. Γενικῶς ἕνας πόλος εἶναι ἕνα ἀνώμαλον σημεῖον (βλ. IV).

Π.χ. Ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{(z-2)^4}$ ἔχει τό $z=2$ πόλον τάξεως $n=4$.

Ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{e^z}{(z-3i)^2\cdot(z-5)}$ ἔχει ὡς πόλους τά σημεῖα $z=3i$ τάξεως $n=2$ καί τό $z=5$ ἁπλόν πόλον.

Προφανῶς ἕνα μηδενίζον σημεῖον πολλαπλότητος n τῆς $f(z)$ θά εἶναι πόλος τάξεως n τῆς $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

<u>**Πρότασις IV-8-1**</u>. <u>Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ἵνα τό</u> $z=z_0$ <u>εἶναι πόλος τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως</u> $f(z)$ <u>εἶναι</u> $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἐπειδή $f(z)=(z-z_0)^{-n}\varphi(z)$, ὅπου $\varphi(z_0)\neq 0$ ἔπεται ὅτι $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$

<u>Ἱκανόν</u>: Ἔστω ὅτι $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$, λέγομεν ὅτι τό z_0 εἶναι πόλος τῆς $f(z)$. Πράγματι, δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕναν ἀριθμόν $r>0$ τοιοῦτον, ὥστε $|f(z)|>1$, ὅταν $0<|z-z_0|<r$. Ἡ συνάρτησις $h(z)=\frac{1}{f(z)}$ εἶναι ἀναλυτική εἰς πάντα τά σημεῖα $z\neq z_0$ τά εὑρισκόμενα ἐντός τοῦ δακτυλίου $0<|z-z_0|<r$ καί ἐπί πλέον εἶναι τοπικῶς φραγμένη εἰς τό $z=z_0$, διότι ἔχομεν: $\lim_{z\to z_0}h(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$ καί διά κάθε z μέ $0<|z-z_0|<r$ ἔχομεν $|h(z)|=\frac{1}{|f(z)|}<1$.

Ὅθεν, ἡ $h(z)$ εἶναι ὁμαλή εἰς τό $z=z_0$ καί ἐπιδέχεται τό $z=z_0$ ὡς μηδενίζον σημεῖον. Θά εἶναι λοιπόν:

$h(z)=(z-z_0)^n\,k(z)$, ὅπου $k(z_0)\neq 0$ καί ἡ $k(z)$ εἶναι ὁμαλή εἰς τό σημεῖον z_0.

Θά ἔχωμεν: $f(z)=\frac{1}{h(z)}=(z-z_0)^{-n}\,\varphi(z)$, ὅπου εἶναι $\varphi(z_0)=\frac{1}{k(z_0)}\neq 0$ καί ἡ $\varphi(z)$ εἶναι ὁμαλή εἰς τό σημεῖον $z=z_0$. Ὅθεν, τό $z=z_0$ εἶναι πόλος τῆς $f(z)$ n-τάξεως.

Π.χ. Οἱ πόλοι τῆς συναρτήσεως $f(z)=\frac{1}{\text{ημ}z}$ εἶναι τά σημεῖα $z=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ διότι,

ἔχομεν $\lim_{z \to k\pi} \frac{1}{|\eta\mu z|} = \infty$. Ὁμοίως τῆς συναρτήσεως $f(z) = \varepsilon\varphi z = \frac{\eta\mu z}{\sigma\upsilon\nu z}$ τὰ σημεῖα $z = k\pi$ εἶναι ἐπίσης ἁπλοῖ πόλοι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, μία συνάρτησις $f(z)$ ἀναλυτική εἰς ἕνα χωρίον G, δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ ἕνα ἀριθμήσιμον πλῆθος πόλων εἰς αὐτὸ τὸ χωρίον.

IV Οὐσιώδη ἀνώμαλα σημεῖα: Ἕνα σημεῖον z_0 τῆς $f(z)$ τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὁμαλὸν ἢ πόλος καλεῖται *οὐσιῶδες ἀνώμαλον* σημεῖον τῆς $f(z)$.

Ἐὰν μία μονότιμος συνάρτησις ἔχῃ ἕνα ἀνώμαλον σημεῖον τότε τοῦτο θὰ εἶναι εἴτε ἕνας πόλος εἴτε ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον ἕνας πόλος λέγομεν ὅτι εἶναι μὴ οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Ὅθεν, τὸ σημεῖον $z = z_0$ θὰ εἶναι ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον, ἐὰν δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕναν θετικὸν ἀκέραιον n τοιοῦτον, ὥστε $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n \cdot f(z) = A \neq 0$.

Π.χ. Αἱ συναρτήσεις $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f(z) = \eta\mu\frac{1}{z}$ ἔχουν τὸ σημεῖον $z = 0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον (διατί;)

Αἱ ἐξισώσεις $e^{\frac{1}{z}} = 1$ καὶ $\eta\mu\frac{1}{z} = 1$ ἱκανοποιοῦνται ὑπὸ μιᾶς ἀπειρίας τιμῶν τοῦ z, ἤτοι: $z = \frac{1}{2k\pi i}$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ καὶ $z = \frac{1}{\frac{1}{2}(4k+1)\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$ ἀντιστοίχως καὶ αἱ ὁποῖαι (ἀκολουθίαι) ἔχουν τὸ σημεῖον $z=0$ ὡς σημεῖον συσσωρεύσεως.

Ἡ συμπεριφορὰ τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον περιγράφεται ὑπὸ τοῦ θεωρήματος τῶν Casorati- Weierstrass, ἤτοι:

Θεώρημα IV-8-1. Τὸ σημεῖον z_0 εἶναι οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς $f(z)$, ἐὰν διὰ κάθε ζεῦγος θετικῶν ἀριθμῶν ε καὶ δ καὶ διὰ κάθε μιγαδικὸν ἀριθμὸν b ὑπάρχῃ ἕνα (τουλάχιστον) σημεῖον z κείμενον ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z - z_0| = \delta$, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|f(z) - b| < \varepsilon$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἔχομεν: Εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ οὐσιώδους ἀνωμάλου σημείου z_0 τῆς $f(z)$ αὐτὴ δύναται νὰ πλησιάσῃ οἱονδήποτε μιγαδικὸν ἀριθμὸν b.

V. Μεμονωμένα ἰδιάζοντα σημεῖα. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)$ καὶ τὸ σημεῖον z_0 τὸ ὁποῖον εἶναι εἴτε πόλος εἴτε οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον αὐτῆς. Θὰ λέγωμεν ὅτι τοῦ-

το εἶναι ἕνα ***μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον*** αὐτῆς, ἐάν δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕν $\delta > 0$ τοιοῦτον, ὥστε ὁ κύκλος $|z - z_0| = \delta$ δέν ἐγκλείει ἄλλα ἰδιάζοντα σημεῖα ἐντός τοῦ z_0.

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις εἶναι ἀναλυτική εἰς κάθε σημεῖον μιᾶς ὡρισμένης περιοχῆς ἐντός τοῦ θεωρηθέντος ἰδιάζοντος σημείου εἰς τό ὁποῖον δυνατόν νά μήν εἶναι ὁμαλή, ἤ διαφορετικά: Εἰς μίαν ὡρισμένην περιοχήν ἑνός μεμονωμένου ἰδιάζοντος σημείου μιᾶς συναρτήσεως δέν ὑπάρχουν ἄλλα ἰδιάζοντα σημεῖα αὐτῆς.

VI Αἰρομένη ἀνωμαλία. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)$ ἡ ὁποία ἔχει τό z_0 οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ὑπάρχει, τότε δυνάμεθα ν' ἀποδώσωμεν εἰς τήν συνάρτησιν $f(z)$ εἰς τό z_0 τιμήν ἴσην πρός τό $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, ἤτοι: $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$. Τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν εἰς τό σημεῖον z_0 αἰρομένην ἀνωμαλίαν.

Κλασσικόν παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{\eta\mu z}{z}$ μέ τό σημεῖον $z = 0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον.

Ἐπειδή $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\eta\mu z}{z} = 1$, ἐάν διά $z = 0$ ἀποδώσωμεν εἰς τήν συνάρτησις τήν τιμήν $f(0) = 1$, ἐπιτυγχάνομεν ἄρσιν τῆς ἀνωμαλίας.

VII Ἀνωμαλία εἰς τό ἄπειρον. Θά λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ ἔχει τό σημεῖον $z = \infty$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον ἤ πόλον, ἐάν ἡ συνάρτησις $\varphi(z) = f(1/z)$ ἔχη τό σημεῖον $z = 0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον ἤ πόλον ἀντιστοίχως. Π.χ. Ἡ συνάρτησις $f(z) = z^2$ ἔχει τό σημεῖον $z = \infty$ πόλον τάξεως $n = 2$, διότι ἡ συνάρτησις $\varphi(z) = f(1/z) = \frac{1}{z^2}$ ἔχει τό σημεῖον $z = 0$ πόλον τάξεως $n = 2$.

Ἡ συνάρτησις $f(z) = e^z$ ἔχει τό $z = \infty$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον, διότι ἡ $\varphi(z) = f(1/z) = e^{1/z}$ ἔχει τό $z = 0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον.

VIII. Κλαδικά σημεῖα. Τά κλαδικά σημεῖα τά ὁποῖα ἐμελετήθησαν εἰς τήν §3 εἶναι καί αὐτα οὐσιώδη ἀνώμαλα σημεῖα τῆς συναρτήσεως. Εἰς τήν §3 περιωρίσθημεν εἰς ἕνα στοιχειώδη ὁρισμόν τῶν κλαδικῶν σημείων, καθ' ὅτι μία βαθυτέρα θεώρησις τοῦ θέματος τούτου ἐξέρχεται τοῦ σκοποῦ τοῦ παρόντος βιβλίου. Σχετικῶς ἰσχύει τό ἀκόλουθον Θεώρημα τό ὁποῖον διατυποῦμεν ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα IV-8-2. Ἵνα ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον z_0 μιᾶς ἀναλυτικῆς

συναρτήσεως $f(z)$ εἶναι κλαδικόν σημεῖον πρέπει καί ἀρκεῖ εἰς κάποιαν **κυκλικήν** περιοχήν, δηλ. $0 \leq |z-z_0| < r$, αὐτοῦ τοῦ σημείου κάθε κλάδος τῆς συναρτήσεως $f(z)$ νά ἔχῃ τήν μορφήν $\phi(\sqrt[n]{z-z_0})$ ἐάν $z_0 \neq \infty$, ἤ τήν μορφήν $\phi(1/\sqrt[n]{z})$ ἐάν $z_0=\infty$, ὅπου ϕ εἶναι μία ἀναλυτική συνάρτησις ἡ ὁποία δέν ἔχει οὐσιώδη ἀνώμαλα σημεῖα (δυνατόν νά ἔχῃ πόλους) εἰς τόν κύκλον $|z| < r^{1/n}$. [1)]

Παραδείγματα 1ον. Ἡ συνάρτησις $f(z) = \sqrt[5]{z-3i}$ ἔχει κλαδικόν σημεῖον τό $z_0 = 3i$

2ον/ Ἡ συνάρτησις $f(z) = \log(z^2+z+1)$ ἔχει ὡς κλαδικά σημεῖα τάς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $z^2+z+1=0$, ἤτοι τά σημεῖα $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ καί $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

3ον/ Ἡ συνάρτησις $f(z) = \sqrt{\log z}$ ἔχει τρία κλαδικά σημεῖα, τά $1, 0, \infty$.

Ἄσκησις: Νά ἐξετασθῆ ὡς πρός τά ἰδιάζοντα σημεῖα ἡ συνάρτησις $f(z) = \text{τεμ}(1/z)$.

Λύσις: Ἐπειδή $\text{τεμ}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\text{συν}(1/z)}$ τά ἰδιάζοντα σημεῖα εἶναι αὐτά διά τά ὁποῖα ἔχομεν $\text{συν}(1/z) = 0$, δηλ. τά σημεῖα ὅπου $\frac{1}{z} = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ ἤ $z = 2/(2n+1)\pi$, ὅπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Ἐπί πλέον καί τό σημεῖον $z=0$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον, διότι ἡ $f(z)$ δέν ὁρίζεται εἰς τοῦτο.

Θά ἐξετάσωμεν ἤδη μή τυχόν τ' ἀνωτέρω σημεῖα εἶναι πόλοι τῆς $f(z)$ καί μάλιστα ἁπλοί πόλοι αὐτῆς. Πρός τούτοις ἐξετάζομεν, ἐάν ὑπάρχῃ τό ὅριον.

$$\lim_{z \to 2/(2n+1)\pi} \left\{ z - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right\} \cdot \text{τεμ}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \to 2/(2n+1)\pi} \frac{z - 2/(2n+1)\pi}{\text{συν}(1/z)}$$

(Ἐφαρμόζοντες τόν κανόνα l'Hospital)

$$= \lim_{z \to 2/(2n+1)\pi} \frac{1}{-\text{ημ}(1/z)\{-1/z^2\}} = \frac{\{2/(2n+1)\pi\}^2}{\text{ημ}\,(2n+1)\pi/2} = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2 \cdot \pi^2} \neq 0.$$

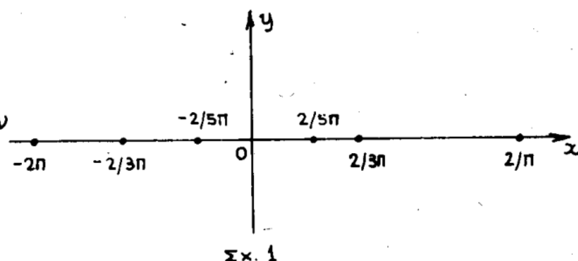
Ὅθεν, τά ἰδιάζοντα σημεῖα $z = 2/(2n+1)\pi$, $n = \pm, \pm 2, \pm 3, \ldots$ εἶναι πόλοι τάξεως ἕνα, δηλ. ἁπλοί πόλοι.

Ἐπειδή πέριξ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν δυνάμεθα νά γράψωμεν ἕναν κύκλον μέ ἀντι-

---

1) *Μία ἀναλυτική συνάρτησις $\phi(z)$ ὡρισμένη εἰς ἕνα ἀνοικτόν σύνολον G, ἡ ὁποία δέν ἔχει ἰδιάζοντα σημεῖα ἐκτός ἀπό πόλους τό πολύ, καλεῖται **μερόμορφος** ἐν G.*

να $\delta > 0$ κατάλληλον ὥστε ἐντός αὐτοῦ νά μήν ὑπάρχη ἄλλος πόλος, διά τοῦτο τά ἀνωτέρω σημεῖα ἀποτελοῦν μεμονωμένα ἰδιάζοντα σημεῖα. Τούς ἀνωτέρω πόλους δυνάμεθα νά τούς τοποθετήσωμεν κατά διάταξιν ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Τέλος ἄς ἐξετάσωμεν τί εἴδους ἰδιάζον σημεῖον εἶναι τό $z=0$. Ἐπειδή δέν δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕναν ἀκέραιον τοιοῦτον ὥστε νά ἔχωμεν: $\lim_{z\to 0}(z-0)^n \cdot \frac{1}{\text{συν}(1/z)} = \lim_{z\to 0}\frac{z^n}{\text{συν}(1/z)} = A \neq 0$, ἔπεται ὅτι τό $z=0$ εἶναι ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς $f(z)$. Ἐπί πλέον δέ κάθε κύκλος μέ κέντρον τήν ἀρχήν καί ἀκτῖνα ὁσοδήποτε μικρά περιέχει ἰδιάζοντα σημεῖα (πόλους) τῆς $f(z)$, ἔπεται ὅτι τό $z=0$ εἶναι ἕνα <u>μή μεμονωμένον ἰδιάζον</u> σημεῖον τῆς $f(z)$.

<u>Ἀσκήσεις</u>:

1. Χρησιμοποιοῦντες τούς κανόνες παραγωγίσεως εὕρατε τάς παραγώγους τῶν κάτωθι ἀναλυτικῶν συναρτήσεων:

   i) $f(z)=\sqrt{z}$, ii) $f(z)=\text{συν}^2(2z+1)$, iii) $f(z)=(z+3i)^{2z+3}$, iv) $f(z)=\log(z^2+2z+1)$,

   v) $f(z)=z\cdot\text{τοξεφ}\log z$, vi) $f(z)=e^{\text{ημ} z}$.

2. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ κάτωθι λογάριθμοι:

   i). $\log 4$, ii). $\log(-4)$, iii). $\log i$ vi) $\log(2-3i)$, v) $\log(-2+3i)$.

3. Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν κάτωθι ἐκφράσεων:

   i) $1^{\sqrt{2}}$, ii) 2^i, iii). $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$, iv) $(3-4i)^{1+i}$, v). $(-3+4i)^{1+i}$

4. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι τιμαί:

   i) $\text{τοξημ}\frac{1}{2}$, ii). $\text{τοξημ} i$, iii) $\text{τοξσυν} 2$, iv) $\text{τοξεφ}(1+2i)$, v) $\text{Arc}\cos 2i$, vi) $\text{Arctanh}(1-i)$

5. Νά εὑρεθοῦν πᾶσαι αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων:

   i). $\text{ημ} z+\text{συν} z=2$, ii) $\text{ημ} z-\text{συν} z=i$ iii) $\text{συν} z=\cosh z$, iv) $\text{ημ} z=i\sinh z$.

6. Εἰς ἑκάστην τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων εὕρατε καί ὀνομάσατε τά ἰδιάζοντα σημεῖα εἰς τό z- ἐπίπεδον:

i) $\frac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$ ii) $\frac{1}{z-z^3}$ iii) $\frac{e^z}{1+z^2}$ iv) $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$.

<u>Ἀπάντ.</u> i) $z=-1\pm i$ ἁπλοί πόλοι, ii) $z=0$, $z=\pm 1$ ἁπλοί πόλοι καί $z=\infty$ εἶναι μηδενίζον τρίτης τάξεως.

iii) $z=\pm i$ εἶναι ἁπλοί πόλοι καί $z=\infty$ εἶναι οὐσιῶδες ἀνώμαλον.

iv) $z=2k\pi i$ $(k=\pm 1,\pm 2,\dots)$ εἶναι ἁπλοί πόλοι καί $z=\infty$ εἶναι οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον (τοῦτο δέ εἶναι τό ὁριακόν σημεῖον τῶν ἀνωτέρω πόλων).

7. Ὁμοίως:

i) $\frac{\log(z+3i)}{z^2}$, ii) $\frac{1}{z^3(2-\sigma\upsilon\nu z)}$, iii) $\sqrt{z(z^2+1)}$.

<u>Ἀπάντ.</u> i) $z=-3i$ κλαδικόν σημεῖον, $z=0$ πόλος δευτέρα τάξεως.

ii) $z=0$ πόλος τρίτης τάξεως, $z=2k\pi\pm i\log(2+\sqrt{3})$, ὅπου $k=0,\pm 1,\pm 2,\dots$ εἶναι πόλοι πρώτης τάξεως, $z=\infty$ (ὁριακόν σημεῖον τῶν πόλων) εἶναι οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον.

iii) $z=0$, $z=\pm i$ εἶναι κλαδικά σημεῖα.

8. Ὁμοίως:

i) $e^{-\frac{1}{z^2}}$, ii) $\frac{1}{\eta\mu z}$, iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu z}{z^2}$, iv) τοξημ$\frac{1}{z}$

<u>Ἀπάντ.</u> i) Τό $z=0$ εἶναι οὐσιῶδες ἀνώμαλον, τό $z=\infty$ εἶναι ἕνα ὁμαλόν σημεῖον.

ii) $z=k\pi$ $(k=0,\pm 1,-\pm 2,\dots)$ εἶναι ἁπλοί πόλοι καί τό $z=\infty$ εἶναι ὁριακόν σημεῖον τῶν ἀνωτέρω πόλων iii) $z=0$ εἶναι πόλος δευτέρας τάξεως καί $z=\infty$ εἶναι οὐσιῶδες ἀνώμαλον iv) $z=0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον.

9. Ὁμοίως:

i) $(z^2+1)/z^{3/2}$ ii) $\frac{1}{\eta\mu(1/z^2)}$ iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu z}{z^2}$ iv) $\epsilon\varphi^2 z$

<u>Ἀπάντ.</u> i) $z=0$ καί $z=\infty$ κλαδικά σημεῖα, ii) $z=1/\sqrt{m\pi}$, $m=\pm 1,\pm 2,\dots$ ἁπλοί πόλοι, $z=0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον, $z=\infty$ πόλος δευτέρας τάξεως iii) $z=0$ πόλος δευτέρας τάξεως, $z=\infty$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον iv) $z=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$ πόλοι δευτέρας τάξεως, $z=\infty$ (ὁριακόν σημεῖον τῶν πόλων) οὐσιῶδες ἀνώμαλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

§1. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ $w=\frac{az+b}{cz+d}$

Θεωροῦμεν τόν μετασχηματισμόν:

$$w=S(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (1)$$

ὅπου οἱ a, b, c, d εἶναι μιγαδικοί καί ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Οὗτος ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἰδίου. Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός καλεῖται *γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός ἤ μετασχηματισμός τοῦ Möbius ἤ ὁμογραφικός μετασχηματισμός*.

i). Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι: $z\neq -\frac{d}{c}$ καί $c\neq 0$, τότε ἡ εἰκών $S(z)$ ἑνός τυχόντος σημείου z θά παρέχεται μονοσημάντως ὑπό τοῦ τύπου (1).

Τό σημεῖον $z=-\frac{d}{c}$ ἔχει ὡς εἰκόνα, μέσω τοῦ (1), τό κατ' ἐξοχήν σημεῖον $w=\infty$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἤτοι:

$$w=S\left(-\frac{d}{c}\right)=\infty, \text{ ἐάν } c\neq 0$$

τοῦ δέ σημείου $z=\infty$ ἡ εἰκών δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$w=S(\infty)=\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\lim_{z\to\infty}\frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}=\frac{a}{c}, \quad c\neq 0.$$

ii) Ἐάν $c=0$, ὁ (1) γράφεται $w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ καί ἐπειδή

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0 \Longrightarrow a\cdot d\neq 0.$$

Ὥστε εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἔχομεν:

$$w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d} \quad (1a) \quad \text{ὅπου } a\cdot b\neq 0.$$

Οὕτω ἡ εἰκών $S(z)$ κάθε σημείου z δίδεται μέσω τοῦ τύπου (1a), τοῦ δέ σημείου $z=\infty$ ἡ εἰκών εἶναι $w=S(\infty)=\infty$.

iii) Ἐάν $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$, τότε $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\lambda$ καί ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$w=S(z)=\frac{c\lambda z+d\lambda}{cz+d}=\lambda$$

Οὕτω ἔχομεν τήν τετριμένην περίπτωσιν, ὅπου $w=S(z)\equiv\lambda$ δηλ. κάθε ση-

μεῖον τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται διά τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς τό αὐτό σημεῖον λ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.

Διά τοῦ τύπου (1) ὁρίζεται καί ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός, ἤτοι:

$$z = S^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a} \qquad (2)$$

Οἱ μετασχηματισμοί S καί S^{-1} εἶναι ἀντίστροφοι ὁ ἕνας τοῦ ἄλλου.

Ὁ μετασχηματισμός (1) δύναται νά γραφῆ καί ὑπό τήν μορφήν:

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \qquad (3)$$

ὅστις εἶναι γραμμικός ὡς πρός z καί γραμμικός ὡς πρός w, δι'αὐτό ὁ (1) καλεῖται καί ***διγραμμικός μετασχηματισμός***.

Ἕνα σημεῖον z τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καλεῖται ***σταθερόν σημεῖον*** διά τόν γραμμικόν κλασματικόν μετασχηματισμόν (1), ἐάν τοῦτο ἱκανοποιῆ τήν ἐξίσωσιν:

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (4) \qquad \text{ἤ}$$

$$cz^2 - (a-d)z - b = 0 \qquad (5)$$

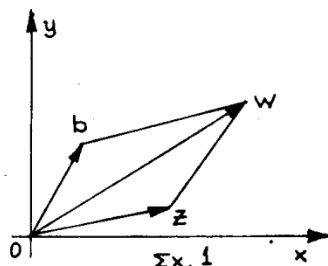
Ἡ (5) εἶναι μία ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ καί ἔχει τό πολύ δύο ρίζας, ἀρκεῖ οἱ συντελεσταί αὐτῆς νά μήν μηδενίζωνται πάντες συγχρόνως.

Μία διερεύνησις τῆς (5) ἐπαφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τόν ἀναγνώστην.

§2. ΕΙΔΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν αἱ κάτωθι εἰδικαί περιπτώσεις τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) τῆς § 1.

I. Ὁ μετασχηματισμός $w = z + b$ (M_1) καλεῖται ***παράλληλος μεταφορά***. Ὅπως δεικνύεται καί εἰς τό Σχ. 1, τό σημεῖον z μεταφέρεται διά τοῦ μετασχηματισμοῦ (M_1) εἰς τό σημεῖον w.



Σχ. 1

Γενικῶς, κάθε χωρίον μεταφέρεται διά τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς ἕνα χωρίον ἴσον πρός τό ἀρχικόν.

II. Ὁ μετασχηματισμός $w = \frac{1}{z}$ (M_2) καλεῖται ***ἀντιστροφή***. Οὗτος δημιουργεῖ

μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ τῶν σημείων $z\ (\neq 0)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἰδίου. Εἰδικῶς τό $z=0$ ἀπεικονίζεται εἰς τό $W=\infty$ καί τό $z=\infty$ ἀπεικονίζεται εἰς τό $w=0$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εἰκών τοῦ κύκλου $|z|=\varepsilon$ εἶναι ὁ κύκλος $|W|=\frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπίσης μία ε-περιοχή $|z|<\varepsilon$ τῆς ἀρχῆς, μέ τήν ἀρχήν ἐξαιρουμένη, ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν περιοχήν τοῦ ἀπείρου $|W|>\frac{1}{\varepsilon}$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις:

$$a(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0 \qquad (1)$$

καί ἡ ὁποία διά $a\neq 0$ παριστᾶ ἕναν κύκλον, ἐνῶ διά $a=0$ παριστᾶ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἐάν εἰς τόν τύπον (M_2) θέσωμεν $z=x+iy$ καί $W=u+iv$, τότε οὗτος γράφεται:

$$u+iv=\frac{1}{x+iy} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν:

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}\ ,\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (3\alpha)$$

$$\text{ἤ} \qquad x=\frac{u}{u^2+v^2}\ ,\quad y=-\frac{v}{u^2+v^2} \qquad (3\beta)$$

Οὕτω, λόγω τῶν (3β), ἡ (1) μετασχηματίζεται εἰς τήν ἐξίσωσιν:

$$\delta(u^2+v^2)+\beta u-\gamma v+a=0 \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (4) συμπεραίνομεν τά κάτωθι:

i) Ἕνας κύκλος $(a\neq 0)$ μή διερχόμενος διά τῆς ἀρχῆς $(\delta\neq 0)$ εἰς τό z-ἐπίπεδον μετασχηματίζεται ὑπό τοῦ (M_2) εἰς τό W-ἐπίπεδον εἰς ἕναν κύκλον μή διερχόμενον διά τῆς ἀρχῆς.

ii) Ἕνας κύκλος εἰς τό z-ἐπίπεδον διερχόμενος διά τῆς ἀρχῆς $(\delta=0)$ μετασχηματίζεται ὑπό τοῦ (M_2) εἰς τό W-ἐπίπεδον εἰς μίαν εὐθεῖαν γραμμήν μή διερχομένην διά τῆς ἀρχῆς.

iii) Μία εὐθεῖα γραμμή $(a=0)$ τοῦ z-ἐπιπέδου μή διερχομένη διά τῆς ἀρχῆς $(\delta\neq 0)$ μετασχηματίζεται ὑπό τοῦ (M_2) εἰς τό W-ἐπίπεδον εἰς ἕναν κύκλον διερχόμενον διά τῆς ἀρχῆς.

iv) Μία εὐθεῖα διερχομένη διά τῆς ἀρχῆς $(a=\delta=0)$ τοῦ z-ἐπιπέδου μετασχηματίζεται ὑπό τοῦ (M_2) εἰς μίαν εὐθεῖαν τοῦ W-ἐπιπέδου διερχομένη διά τῆς ἀρχῆς.

v) Ἡ εὐθεῖα $x=c_1$, $(c_1\neq 0)$ μετασχηματίζεται εἰς τόν κύκλον $u^2+v^2-\frac{u}{c_1}=0$ (5), ὅστις ἐφάπτεται τοῦ v-ἄξονος εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

vi) Ἡ εὐθεῖα $y=c_2$, $(c_2\neq 0)$ μετασχηματίζεται εἰς τόν κύκλον $u^2+v^2+\frac{v}{c_2}=0$ (6) ὅστις ἐφάπτεται τοῦ u-ἄξονος εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων.

vii) Τό ἡμιεπίπεδον $x>c_1$ $(c_1>0)$ ἔχει ὡς εἰκόνα μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ (M_2) τό χωρίον

$$\frac{u}{u^2+v^2}>c_1 \quad (7) \quad \text{ἤ} \quad \left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2<\left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 \qquad (8)$$

Λόγῳ τῆς (8) ἡ εἰκών κάθε σημείου εἰς τό ἀνωτέρω θεωρηθέν ἡμιεπίπεδον κεῖται ἐντός τοῦ κύκλου πού ἔχει ἐξίσωσιν $\left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2=\left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$.
Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον κείμενον ἐντός τοῦ ἀνωτέρω κύκλου θά εἶναι ἡ εἰκών κάποιου σημείου τοῦ ἀνωτέρω ἡμιεπιπέδου. Οὕτω ἡ εἰκών τοῦ ἡμιεπιπέδου εἶναι ὁλόκληρον τό κυκλικόν χωρίον.

III. Ὁ μετασχηματισμός $w=a\cdot z$ (M_3) a: μιγαδικός ἀριθμός, καλεῖται ***περιστροφή***. Ἐάν $a=|a|\cdot e^{i\theta}=\rho\cdot e^{i\theta}$ καί $z=|z|\cdot e^{i\varphi}=r\cdot e^{i\varphi}$, τότε λόγῳ τῆς (3) θά ἔχωμεν:

$$w=\rho\cdot r\cdot e^{i(\theta+\varphi)} \qquad (1).$$

Οὕτω ὁ μετασχηματισμός ὁ ὁριζόμενος ὑπό τοῦ τύπου (3) ἀπεικονίζει κάθε σημεῖον $z\,(\neq 0)$ μέ πολικάς συντεταγμένας (r,φ) εἰς τό μή μηδενικόν σημεῖον w ἔχον πολικάς συντεταγμένας $(\rho\cdot r,\ \theta+\varphi)$. Αὕτη ἡ ἀπεικόνισις ἐπιφέρει μίαν περιστροφήν τοῦ ἀρχικοῦ διανύσματος z πέριξ τῆς ἀρχῆς κατά γωνίαν $\theta=\arg a$ καί ἐπίσης μίαν «διαστολήν», ἐάν $\rho>1$ ἤ «συστολήν» ἐάν $\rho<1$ τοῦ διανύσματος z ὑπό τοῦ παράγοντος $|a|=\rho$. Ἡ εἰκών δοθέντος χωρίου τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ὑπό τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἶναι ἕνα χωρίον ὅμοιον πρός τό ἀρχικόν.

IV. Ὁ μετασχηματισμός $w=az+b$ (M_4), ὅστις συνίσταται ἀπό μίαν περιστροφήν καί μίαν παράλληλον μεταφοράν καλεῖται ***γραμμικός μετασχηματισμός***. (Οὗτος εἶναι ἡ σύνθεσις τῶν μετασχηματισμῶν I καί III.)

- Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τούς μετασχηματισμούς (M_1), (M_2), (M_3) παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ μετασχηματισμός (1) τῆς § 1 δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἡ κατάλληλος σύνθεσις τῶν κάτωθι μετασχηματισμῶν:

$$w = z + b,\ w = \frac{1}{z},\ w = a \cdot z,$$

οἱ ὁποῖοι καλοῦνται καί ***γεννήτορες*** τοῦ γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ (1).

Οὕτω ὁ γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός $w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἡ σύνθεσις τῶν κάτωθι μετασχηματισμῶν:

$$Z = cz + d,\ W = \frac{1}{Z},\ w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot W$$

Εὐκόλως δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν ὅτι οἱ μετασχηματισμοί $w = z + b$ καί $w = az$ ἀπεικονίζουν τήν περιφέρειαν ἤ τήν εὐθεῖαν εἰς περιφέρειαν ἤ εὐθεῖαν ἀντιστοίχως. Ὁ δέ μετασχηματισμός $w = \frac{1}{z}$, ὅπως εἴδομεν, ἀπεικονίζει ἄλλοτε μέν τήν περιφέρειαν εἰς περιφέρειαν, ἄλλοτε δέ εἰς εὐθεῖαν καί τήν εὐθεῖαν εἰς εὐθεῖαν ἤ περιφέρειαν.

Ἐάν θεωρήσωμεν τήν εὐθεῖαν γραμμήν ὡς μίαν περιφέρειαν ὑπό τήν εὐρεῖαν ἔννοιαν (ἔχουσα ἄπειρον ἀκτῖνα), τότε ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως δυνάμεθα νά ἐξαγάγωμεν τό κατωτέρω σπουδαῖον συμπέρασμα:

<u>Πρότασις V-2-1.</u> <u>Οἱ γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί διατηροῦν τάς ὑπό εὐρεῖαν ἔννοιαν περιφερείας.</u>

§3. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΛΟΓΟΥ

Ἔστωσαν τά διακεκριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3, z_4. Καλοῦμεν ***διπλοῦν λόγον*** αὐτῶν καί τόν συμβολίζομεν μέ (z_1, z_2, z_3, z_4) τήν κάτωθι παράστασιν:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

Δυνάμεθα νά ἐπεκτείνωμεν τήν ἔννοιαν τοῦ διπλοῦ λόγου καί εἰς τετράδας σημείων τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ὅπου τό <u>ἕνα</u> ἐξ αὐτῶν εἶναι τό ∞. Οὕτω, π.χ. θά ἔχωμεν:

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \lim_{z \to \infty} (z_1, z_2, z_3, z) = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τάς τιμάς τῶν κάτωθι διπλῶν λόγων:

$$(z_1, z_2, \infty, z_4),\ (z_1, \infty, z_3, z_4),\ (\infty, z_2, z_3, z_4).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω μία ἄμεσος διαπίστωσις εἶναι ἡ κάτωθι:

$$z=(z,0,1,\infty)=(0,z,\infty,1)=(1,\infty,z,0)=(\infty,1,0,z).$$

Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἐξίσωσιν τῶν διπλῶν λόγων:

$$(w, w_2, w_3, w_4)=(z, z_2, z_3, z_4) \qquad (1).$$

Ἐάν εἰς τά διακεκριμένα σημεῖα z_2, z_3, z_4 ἀντιστοιχίσωμεν τά σημεῖα $0, 1, \infty$, τότε ἡ (1) γράφεται:

$$(w, 0, 1, \infty)=(z, z_2, z_3, z_4) \qquad (2)$$

Ἐπειδή εἶναι $(w,0,1,\infty)=w$, ἡ (2) γίνεται:

$$w=\frac{z-z_2}{z-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται:

Πρότασις V-3-1. Ἐάν z_2, z_3, z_4 εἶναι τρία διακεκριμένα σημεῖα τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχει ἕνας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός $w=T(z)$, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τά σημεῖα ταῦτα εἰς τά $0, 1, \infty$ ἀντιστοίχως.

Συμφώνως πρός τήν ἀνωτέρω πρότασιν ἔχομεν:

$$w=T(z)=\frac{z-z_2}{z-z_4}\cdot\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}$$

καί

$$T(z_1)=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}:\frac{z_3-z_2}{z_3-z_4}=(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται:

Πόρισμα V-3-1. Ὁ διπλοῦς λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) εἶναι ἡ εἰκών τοῦ z_1 διά τοῦ μονοσημάντως ὁριζομένου ὑπό τῆς ἀνωτέρω προτάσεως μετασχηματισμοῦ $w=Tz$, ἤτοι: $(z_1, z_2, z_3, z_4)=Tz_1$.

Πρότασις V-3-2. Ἔστωσαν τέσσαρα διακεκριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3, z_4 τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καί ὁ γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός $w=Sz$. Τότε ἰσχύει:

$$(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

δηλ. ὁ γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός διατηρεῖ τόν διπλοῦν λόγον.

Ἀπόδειξις: Ἄς θεωρήσωμεν τόν μετασχηματισμόν $w=Tz$ πού ὁρίσθη εἰς τήν προηγουμένην πρότασιν καί ἄς εὕρωμεν τάς εἰκόνας τῶν Sz_2, Sz_3, Sz_4 ὑπό τοῦ TS^{-1}. Πρός τούτοις ἔχομεν:

$$TS^{-1}(Sz_2)=Tz_2=0,\ TS^{-1}(Sz_3)=Tz_3=1,\ TS^{-1}(Sz_3)=Tz_3=\infty.$$

Ἑπομένως βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως καί τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος ἔχομεν:

$$(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4)=TS^{-1}(Sz_1)=Tz_1=(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

● Μέ τήν βοήθειαν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δυνάμεθα νά εὕρωμεν τόν γραμμικόν κλασματικόν μετασχηματισμόν πού ἀπεικονίζει τρία διακεκριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3 εἰς τά διακεκριμένα σημεῖα w_1, w_2, w_3 ἀντιστοίχως, ἀρκεῖ πρός τούτοις νά γράψωμεν τόν μετασχηματισμόν $(w, w_1, w_2, w_3)=(z, z_1, z_2, z_3)$.

Τό ἀνωτέρω τό διατυποῦμεν εἰς τήν κάτωθι πρότασιν καί δίδομεν μίαν ξεχωριστήν ἀπόδειξιν.

Πρότασις V-3-3. Ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τρία διακεκριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3 τοῦ ἐκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου εἰς τρία διακεκριμένα σημεῖα w_1, w_2, w_3 αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις: Ἐάν θεωρήσωμεν τήν ἐξίσωσιν:

$$\frac{(w-w_1)\cdot(w_2-w_3)}{(w-w_3)\cdot(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)\cdot(z_2-z_3)}{(z-z_3)\cdot(z_2-z_1)} \qquad (1),$$

λέγομεν ὅτι αὐτή ὁρίζει τόν ἐν λόγῳ μετασχηματισμόν.

Πράγματι, αὐτή γράφεται:

$$(z-z_3)\cdot(w-w_1)\,(z_2-z_1)\cdot(w_2-w_3)=(z-z_1)\cdot(w-w_3)\,(z_2-z_3)(w_2-w_1) \qquad (2).$$

Ἐάν εἰς τήν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν $z=z_1$, τό δεξιόν μέλος τῆς (2) γίνεται μηδέν καί ἐξ αὐτοῦ ἕπεται, ὅτι $w=w_1$. Ἀναλόγως, ἐάν θέσωμεν $z=z_3$, τό ἀριστερόν μέλος γίνεται μηδέν καί ἐξ αὐτοῦ ἕπεται, ὅτι $w=w_3$. Τέλος διά $z=z_2$ ἐπιτυγχάνομεν τήν ἐξίσωσιν:

$$(w-w_1)\cdot(w_2-w_3)=(w-w_3)\cdot(w_2-w_1),$$

ἡ ὁποία ἔχει τήν μοναδικήν λύσιν $w=w_2$.

Τέλος ἂς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ὅπου ἕνα τῶν δοθέντων σημείων τοῦ W-ἐπιπέδου ἔστω π.χ τὸ $W_2=\infty$. Τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$\frac{(W-W_1)\left(1-\frac{W_3}{W_2}\right)}{(W-W_3)\cdot\left(1-\frac{W_1}{W_2}\right)}=\frac{(z-z_1)\cdot(z_2-z_3)}{(z-z_3)\cdot(z_2-z_1)} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ $\frac{1}{W_2}=0$, ἡ (3) δίδει:

$$\frac{W-W_1}{W-W_3}=\frac{(z-z_1)\cdot(z_2-z_3)}{(z-z_3)\cdot(z_2-z_1)} \qquad (4)$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ὁρίζεται ἕνας γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμός.

• <u>Παράδειγμα</u>: Νὰ προσδιορισθῆ ὁ γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμὸς $W=S(z)$, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=-1$, ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεῖα $W_1=i$, $W_2=\infty$, $W_3=1$.

<u>Λύσις</u>: Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (4) τὰ z_1, z_2, z_3 καὶ W_1, W_3, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις:

$$W=\frac{(1+i)z+(i-1)}{2z}$$

Εὐκόλως ἐπαληθεύομεν, ὅτι τὰ δοθέντα σημεῖα τοῦ z-ἐπιπέδου ἀπεικονίζονται εἰς τὰ δοθέντα σημεῖα τοῦ W-ἐπιπέδου.

<u>Πρότασις V-3-4</u>. <u>Ὁ διπλοῦς λόγος</u> (z_1, z_2, z_3, z_4) <u>εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, τὰ τέσσαρα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν</u> (δηλ. <u>ἐπὶ μιᾶς περιφερείας ἢ μιᾶς εὐθείας</u>).

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἂν θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα z_2, z_3, z_4, τότε συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν V-3-1 ὑπάρχει ἕνας γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμὸς ποὺ ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα ταῦτα εἰς τὰ σημεῖα $0, 1, \infty$ καὶ ἂς καλέσωμεν δὲ τοῦτον τὸν μετασχηματισμὸν $W=Tz$.

Ἔστω δὲ $W_1=Tz_1$. Ὡς γνωστὸν ἔχομεν:

$$W_1=(W_1, 0, 1, \infty)=(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

i) Ἐὰν τὰ z_1, z_2, z_3, z_4 ἀνήκουν εἰς μίαν ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν περιφέρειαν, τότε βάσει τῆς προτάσεως V-2-1 καὶ τὰ $W_1, 0, 1, \infty$ θὰ ἀνήκουν εἰς μίαν ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν

ἔννοιαν περιφέρειαν, ἐν προκειμένῳ δέ ταῦτα ἀνήκουν εἰς τήν εὐθεῖαν τήν ὁριζομένην ὑπό τῶν 0 καί 1. Κατά συνέπειαν ὁ λόγος $(W_1, 0, 1, \infty)$ θά εἶναι πραγματικός ἀριθμός καί ἴσος πρός τόν πραγματικόν ἀριθμόν W_1. Ὅθεν, ὁ λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) εἶναι πραγματικός ἀριθμός.

ii) Ἐάν ὁ λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) εἶναι πραγματικός ἀριθμός, τότε καί τό W_1 εἶναι πραγματικός ἀριθμός ἤτοι τά $W_1, 0, 1, \infty$ ἀνήκουν εἰς τήν εὐθεῖαν τήν ὁριζομένην ὑπό τῶν 0 καί 1, βάσει δέ τῆς προτάσεως V-2-1 τά z_1, z_2, z_3, z_4 θά ἀνήκουν εἰς μίαν ὑπό τήν εὐρεῖαν ἔννοιαν περιφέρειαν.

§4. ΕΙΔΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ.

I. Θεωροῦμεν τόν γραμμικόν κλασματικόν μετασχηματισμόν:

$$W = e^{i\theta}\cdot\left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right) \qquad (1)$$

Λέγομεν ὅτι, ἐάν τό z_0 εὑρίσκεται εἰς τό ἄνω ἡμιεπίπεδον τοῦ z-ἐπιπέδου ὁ (1) ἀπεικονίζει τό ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐντός τοῦ μοναδιαίου κύκλου τοῦ W-ἐπιπέδου ἤτοι: $|W| \leq 1$.

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν ὅτι:

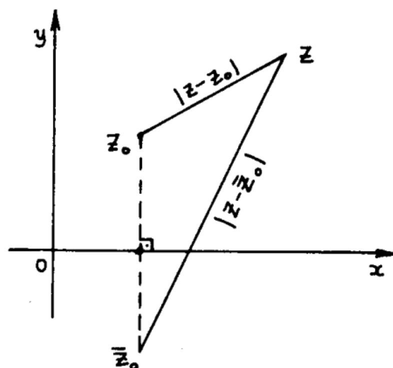
$$|W| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)\right| = \left|\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right| \quad (2)$$

Ἐξ ἄλλου, ὅπως φαίνεται καί ἀπό τό Σχ. 1, ἰσχύει:

$$|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0| \qquad (3),$$

ἡ δέ ἰσότης εἰς τήν (3) ἰσχύει, τότε καί μόνον τότε, ἐάν τό z εὑρίσκεται ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τῶν x. Ἐκ τῶν (2) καί (3) λαμβάνομεν:

$$|W| \leq 1. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$



Σχ. 1

• Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθῇ ἕνας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος νά ἀπεικονίζῃ τό ἄνω ἡμιεπίπεδον τοῦ z-ἐπιπέδου εἰς τόν μοναδιαῖον κύκλον τοῦ W-ἐπιπέδου καί τά σημεῖα i, ∞ εἰς τά σημεῖα $0, -1$ ἀντιστοίχως.

Λύσις: Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω, ὁ μετασχηματισμός θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$W = e^{i\theta}\cdot\left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right) \qquad (1)$$

Θέτοντες διά $z=i$ $W=0$, ή (1) γράφεται:

$$0=e^{i\theta}\left(\frac{i-z_0}{i-\bar{z}_0}\right) \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν $z_0=i$.

Ἡ (1) λοιπόν γίνεται

$$W=e^{i\theta}\left(\frac{1-\frac{i}{z}}{1+\frac{i}{z}}\right) \quad (3)$$

Θέτοντες εἰς τήν (3) διά $z=\infty$ $W=-1$ εὑρίσκομεν: $-1=e^{i\theta}$.

Ὅθεν, ὁ (1) γράφεται τελικῶς:

$$W=(-1)\cdot\frac{z-i}{z+i}=\frac{i-z}{i+z}.$$

● Ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι κάθε μετασχηματισμός τῆς μορφῆς $W=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}$, ὅπου $|z_0|<1$, ἀπεικονίζει τόν μοναδιαῖον δίσκον $|z|\leq 1$ ἐντός τοῦ μοναδιαίου δίσκου $|W|\leq 1$ ἀμφιμονοσημάντως.

II. Ὁ μετασχηματισμός $W=\bar{z}$ (1) ἀπεικονίζει ἀμφιμονοσημάντως τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ἐπί τοῦ ἰδίου. Οὗτος διατηρεῖ τάς περιφερείας καί τήν εὐθεῖαν τήν ἀπεικονίζει εἰς εὐθεῖαν

Ὁ μετασχηματισμός $W=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ (2), $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$, ὅστις δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἡ σύνθεσις τῶν μετασχηματισμῶν $W=\frac{az+b}{cz+d}$ καί $W=\bar{z}$ καλεῖται ***ἀντι-Möbius μετασχηματισμός***.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι:

i) <u>Οἱ ἀντι-Möbius μετασχηματισμοί διατηροῦν τάς ὑπό εὐρεῖαν ἔννοιαν περιφερείας.</u>

Ὁ ἀντί-Möbius μετασχηματισμός πού ἀπεικονίζει τά τρία διακεκριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3 εἰς τά διακεκριμένα σημεῖα W_1, W_2, W_3 θά δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$(W, W_1, W_2, W_3) = (\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \quad (1)$$

Ἐκ τοῦ (1) λαμβάνομεν:

$$(W, W_1, W_2, W_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \quad (2)$$

Ἀλλά $\overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = (z, z_1, z_2, z_3)$, τότε καί μόνον τότε, ὅταν ὁ διπλοῦς λόγος

(z, z_1, z_2, z_3) εἶναι πραγματικός ἀριθμός. Ὅθεν θά ἔχωμεν:

ii) Οἱ ἀντι-Möbious μετασχηματισμοί διατηροῦν τόν διπλοῦν λόγον, τότε καί μόνον τότε, ὅταν οὗτος εἶναι πραγματικός ἀριθμός.

§ 5. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Εἰς τήν παροῦσαν § κρίνομεν σκόπιμον νά δώσωμεν μερικάς ἐνδιαφερούσας ἐφαρμογάς τοῦ γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ. Ὑπενθυμίζομεν εἰς τόν ἀναγνώστην ὅτι, μία εὐθεῖα θεωρεῖται καί αὐτή μία ὑπό τήν εὐρεῖαν ἔννοιαν περιφέρεια μέ ἄπειρον ἀκτῖνα. Μία εὐθεῖα διερχομένη διά τῶν σημείων (a,b) θά συμβολίζεται μέ $\mathcal{E}(a,b)$. Ἡ δέ ἐξίσωσίς της, ὡς γνωστόν, θά εἶναι: $z=a+t\cdot b$, $t\in R$. Ἐάν δέ συμπεριλάβωμεν καί τό ∞ εἰς αὐτήν, θά τήν συμβολίζωμεν οὕτω: $\tilde{\mathcal{E}}(a,b)\equiv \mathcal{E}(a,b)\cup\{\infty\}$.

1ο/ Νά εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες τῶν κάτωθι ὑπό εὐρεῖαν ἔννοιαν περιφερειῶν διά τοῦ γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ $w=\frac{z+i}{z-i}$. (1)

i) $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$, ii) $|z-(1+i)|=2$, iii) $\tilde{\mathcal{E}}(-i, 1+i)$

Λύσις: Ἐκ τῆς σχέσεως $w=\frac{z+i}{z-i}$ λαμβάνομεν:

$$z=\frac{i(w+1)}{w-1} \quad \text{καί} \quad \bar{z}=-\frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} \qquad (2)$$

i) Ἔχομεν:

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4} \Longleftrightarrow \left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$$ καί δυνάμει τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$\left[\frac{i(w+1)}{w-1}-\frac{1}{2}\right]\cdot\left[-\frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{16}$$

ἡ τελευταία, μετά τάς πράξεις, γίνεται:

$$13(\bar{w}+w)-16i(\bar{w}-w)+19(w\bar{w}+1)=0$$

ἤ θέτοντες $w=u+iv$, ὁπότε $\bar{w}=u-iv$, λαμβάνομεν:

$$19u^2+19v^2+26u-32v+19=0 \quad \text{ἤ} \quad \left(u+\frac{13}{19}\right)^2+\left(v-\frac{16}{19}\right)^2=\left(\frac{8}{19}\right)^2,$$

ἤτοι περιφέρεια κέντρου $w_0=-\frac{13}{19}+i\,\frac{16}{19}$ καί ἀκτῖνος $R=\frac{8}{19}$.

ἄρα ἡ $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4} \xrightarrow{(1)} C:\ |w-w_0|=\frac{8}{19}$.

ii) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἔχομεν:

$|z-(1+i)=2 \Longleftrightarrow (z-1-i)(\bar{z}-1+i)=4$ καί λόγω τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$\left[\frac{i(w+1)}{w-1}-1-i\right]\cdot\left[-\frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}-1+i\right]=4$$ ἢ μετά τάς πράξεις:

$$3(\bar{w}+w)-2i(\bar{w}-w)-3w\bar{w}+1=0$$

Θέτοντες $w=u+iv$, ὁπότε $\bar{w}=u-iv$, τελικῶς εὑρίσκομεν:

$$(u-1)^2+\left(v+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{9},$$

ἤτοι περιφέρεια κέντρου $w_0=1-i\frac{2}{3}$ καί ἀκτῖνος $R=\frac{4}{3}$.

iii) Ὡς γνωστόν $\tilde{\mathcal{E}}(-i,1+i)=\mathcal{E}(-i,1+i)\cup\{\infty\}$ καί

$$\mathcal{E}(-i,1+i)=\{z\in\mathbb{C}:\ z=-i+t(1+i),\ t\in\mathbb{R}\}.$$

Ὅθεν: $$z=t+i(t-1) \qquad (3)$$

Ἀλλά, λόγω τῆς (2), $$z=\frac{i(w+1)}{w-1} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καί (4) λαμβάνομεν:

$$\frac{i(w+1)}{w-1}=t+i(t-1),\ t\in R \qquad (5)$$

ἢ θέτοντες $w=u+iv$ καί ἐκτελοῦντες πράξεις εὑρίσκομεν:

$$-v+i(u+1)=[tu-t-(t-1)\cdot v]+i[tv+(t-1)u-t+1]$$

Ἐκ τῆς τελευταίας λαμβάνομεν:

$$tu-t-(t-1)\cdot v=-v \qquad (6)$$

$$tv+(t-1)u-t+1=u+1 \qquad (7)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ t, μεταξύ τῶν (6) καί (7), τελικῶς εὑρίσκομεν:

$$u^2+v^2-u-v=0 \ \text{ἢ}\ \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{4}$$

ἤτοι περιφέρεια C κέντρου $w_0=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ καί ἀκτῖνος $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ὥστε ἡ $\mathcal{E}(-i,1+i)\xrightarrow{(1)} C:\ |w-w_0|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἐπειδή ἐξ ἄλλου ἡ εἰκών τοῦ ∞, μέσω τοῦ $w=\frac{z+i}{z-i}$, εἶναι τό 1, καθ'ὅσον $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z+i}{z-i}=1$, ἰσχύει δέ $1\in C$, καθ' ὅσον:

$$|1-w_0|=\left|1-\frac{1}{2}(1+i)\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}|1-i|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ἄρα τελικῶς ἔχομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα $\tilde{\mathcal{E}}(-i,1+i)$ μέσω τοῦ $w=\frac{z+i}{z-i}$ ἀπεικονίζεται εἰς τήν περιφέρειαν: $|w-w_0|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

29. Νά δειχθῆ ὅτι ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $W=\frac{z+i}{iz+1}$ τό ἡμιεπίπεδο $\mathcal{Im}(z)\leq 0$ ἀπεικονίζεται στό μοναδιαίο κύκλο $|W|\leq 1$.

Ἀπόδειξη Ἔχομεν $w \cdot \bar{w} = |w|^2 = \frac{z+i}{iz+1} \cdot \overline{\frac{z+i}{iz+1}} = \frac{z\cdot\bar{z}+1+2\,\mathrm{Im}(z)}{(z\cdot\bar{z}+1)-2\,\mathrm{Im}(z)} \leq 1$, διότι $z\cdot\bar{z}+1>0$ καί $\mathrm{Im} \leq 0$, ἐξ ὑποθέσεως.

3ο/ Νά δειχθῆ ὅτι ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=\frac{i(1-z)}{1+z}$ ὁ μοναδιαῖος κύκλος $|z|<1$ ἀπεικονίζεται εἰς τό ἡμιεπίπεδον $\mathrm{Im}(w)>0$

Ἀπόδειξη: Ἔχομεν: $\mathrm{Im}(w)=\frac{1}{2i}(w-\bar{w})=\frac{1}{2i}\left[\frac{i(1-z)}{1+z}+\frac{i(1-\bar{z})}{1+\bar{z}}\right]=\frac{1-z\cdot\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}}=$

$=\frac{1-|z|^2}{1+x^2+y^2+2x}=\frac{1-|z|^2}{(1+x)^2+y^2}>0$. $(z=x+iy)$ Ὅθεν, $\mathrm{Im}(w)>0$.

4ο/ Δίδεται τρίγωνο μέ κορυφές τα σημεῖα $0, 1, i$.
Νά εὑρεθῆ γραμμική συνάρτηση πού νά ἀπεικονίζη τό δοθέν τρίγωνο σέ ἕνα ἄλλο ὅμοιο πρός αὐτό τέτοια, ὥστε τίς κορυφές $0, 1$ νά τίς ἀπεικονίζη στίς κορυφές $1+i$, 0 τοῦ ὁμοίου του.

Λύση: Ἡ ζητουμένη συνάρτηση εἶναι της μορφῆς $w=az+b$. Θέτοντες $z=0,1$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση $w=1+i, 0$. Ἔχομεν λοιπόν πρός ἐπίλυση τό σύστημα: $1+i=b$ καί $0=a+b$.
Ὅθεν, $a=-1-i$, $b=1+i$. Ἡ γραμμική ἀπεικόνιση εἶναι $w=(1+i)(1-z)$.
Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κορυφή i ἀπεικονίζεται στό σημεῖο 2.

5ο/ Νά κατασκευασθῆ ἡ εἰκόνα του χωρίου $\mathrm{Im}\frac{z-2}{i}<0$ ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=\frac{z+i}{z-i}$.

Λύση Ἔστω $z=x+iy$ καί ἡ σχέση $\mathrm{Im}\frac{z-2}{i}<0$ γράφεται: $\mathrm{Im}\frac{x+iy-2}{i}<0$ ἤ $\mathrm{Im}\,[y+i(2-x)]<0$ ἤ $2-x<0$ ἤ $x>2$. Ἐκ τοῦ δοθέντος μετασχηματισμοῦ λαμβάνομεν: $z=\frac{i(w+1)}{w-1}$ (1) καί $\bar{z}=\frac{-i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}$ (2).
Ἡ σχέση $x>2$ ἤ $x-2>0$ γράφεται: $\frac{1}{2}(z+\bar{z})-2>0$ ἤ $z+\bar{z}-4>0$.
Ἀντικαθιστῶντες τάς τιμάς τῶν z καί $\bar{z}$ συναρτήσει τοῦ W ἐκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν: $\frac{i(w+1)}{w-1}+\frac{-i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}-4>0$ (3) Μετά τας πράξεις

ἡ τελευταία σχέση γράφεται:

$$\frac{-2iw+2i\bar{w}-4w\bar{w}+4w+4\bar{w}-4}{|w-1|^2}>0 \qquad (4)$$

Θέτοντες στὴν (4) $w=u+iv$ καὶ $\bar{w}=u-iv$ ἡ ἀνωτέρω σχέση ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν κάτωθι:

$$-2iu+2v+2iu+2v-4u^2-4v^2+4u+4iv+4v-4iv-4>0 \quad (5)$$

$$4v-4u^2-4v^2+8u-4>0 \quad \text{ἤ} \quad u^2-2u+1+v^2-v<0 \quad \text{ἤ}$$

$$(u-1)^2+\left(v-\tfrac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4} \qquad (6)$$

Ὅθεν, τὸ ἀνωτέρω χωρίο (δηλ. ἡ λωρίδα $x>2$) ἀπεικονίζεται διὰ τοῦ δοθέντος μετασχηματισμοῦ στὸ ἐσωτερικὸ περιφερείας κέντρου $K(1,{}^1/_2)$ καὶ ἀκτῖνος $R=\frac{1}{2}$.

6η/. Νὰ εὑρεθῆ ποῦ ἀπεικονίζεται τὸ χωρίο $\Im m\, z\leq 0$ ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=\frac{z+i}{z-1}$.

Λύση Ἐπειδὴ $\Im m\, z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ θὰ ἔχωμεν $\frac{z-\bar{z}}{2i}<0 \quad (1)$

Ἐκ τοῦ $w=\frac{z+i}{z-i}$ λαμβάνομεν: $z=\frac{i(w+1)}{w-1} \quad (2)$ καὶ $\bar{z}=\frac{-i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} \quad (3)$

Ἡ (1) λόγω τῶν (2) καὶ (3) γίνεται:

$$\frac{1}{2i}\left[\frac{i(w+1)}{w-1}+\frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}\right]<0 \quad \text{ἤ} \quad \frac{w+1}{w-1}+\frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1}<0 \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν $\frac{2|w|^2-2}{|w-1|^2}<0$ ἤ $|w|<1$.

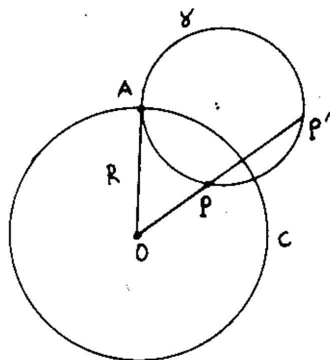
§5. ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ Ἢ ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΥ

Ὁρισμὸς V-5-1. *Δύο σημεῖα P καὶ P' θὰ καλοῦνται συμμετρικὰ ἢ κατοπτρικὰ ὡς πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν C κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος R, ἐὰν ταῦτα κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου 0 καὶ ἐπὶ πλέον αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τὸ 0 ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν:* $OP\cdot OP'=R^2$.

Ἤδη παραθέτομεν ἕνα σπουδαῖον θεώρημα ποὺ ἀφορᾶ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα.

Θεώρημα V-5-1. Δύο σημεία P καί P′ είναι συμμετρικά ώς πρός έναν κύκλον C, εάν καί μόνον εάν, κάθε κύκλος (ή ευθεία γραμμή) γ διερχόμενος διά τών P καί P′ είναι ορθογώνιος πρός τόν C.

Απόδειξις: Έστωσαν τά P καί P′ συμμετρικά ώς πρός τόν C καί έστω γ ένας κύκλος διερχόμενος διά τών P καί P′, έστω δέ OA ή εφαπτομένη πρός τόν γ εκ τού κέντρου O (βλ. Σχ. 1). Τότε, συμφώνως πρός γνωστόν θεώρημα τής Γεωμετρίας (Δύναμις σημείου ώς πρός κύκλον), θά έχωμεν: $OA^2 = OP \cdot OP'$. Έξ άλλου, λόγω τής συμμετρίας είναι $OP \cdot OP' = R^2$. Εκ τών δύο τελευταίων σχέσεων έπεται $OA = R$. Τότε τό A θά κείται επί τής περιφερείας τού C, κείται δέ καί επί τής περιφερείας τής γ καί ώς εκ τούτου θά κείται είς τήν τομήν αυτών. Επειδή δέ ή ακτίς OA



Σχ. 1

είναι εφαπτομένη τού γ έπεται, ότι οί κύκλοι C καί γ τέμνονται ορθογωνίως.

Αντιστρόφως: Υποθέτομεν ήδη ότι κάθε κύκλος γ διερχόμενος διά τών P καί P′ τέμνει ορθογωνίως τόν C. Τότε ή ευθεία ή διερχομένη διά τών P καί P′ οφείλει νά διέρχεται διά τού κέντρου O τού κύκλου C, καθ' ότι ή ευθεία αύτη θεωρουμένη ώς περιφέρεια υπό τήν ευρείαν έννοιαν θά είναι ορθογώνιος πρός τόν C καί ώς εκ τούτου οφείλει νά διέρχεται διά τού κέντρου τού C. Εάν λοιπόν φέρωμεν τήν ακτίνα OA, θά έχωμεν τότε $R^2 = OA^2 = OP \cdot OP'$. Άρα τά σημεία P καί P′ είναι συμμετρικά ώς πρός τόν C.

Θεώρημα V-5-2. Δίδονται τά σημεία z_1 καί z_2, τά οποία είναι συμμετρικά ώς πρός έναν κύκλον C καί έστωσαν W_1, W_2 καί Γ αί εικόνες τών z_1, z_2 καί C αντιστοίχως, υπό τού μετασχηματισμού $W = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - c \cdot b \neq 0$. Τότε τά σημεία W_1 καί W_2 είναι συμμετρικά ώς πρός τόν κύκλον Γ.

Απόδειξις: Σύμφωνα πρός τό προηγούμενον θεώρημα αρκεί νά δείξωμεν ότι κάθε κύκλος (ή ευθεία γραμμή) L διερχόμενος διά τών W_1, W_2 είναι

ὀρθογώνιος πρός τόν Γ. Ἔστω $z = S^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ ὅτι εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ μετασχηματισμοῦ $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-cb \neq 0$ καί ἔστω γ ὅτι εἶναι ἡ εἰκών L ὑπό τοῦ $z = S^{-1}(w)$. Τότε, ὡς γνωστόν, ἡ εἰκών γ θά εἶναι ἕνας κύκλος ἤ μία εὐθεῖα διερχομένη διά τῶν z_1 καί z_2. Ἐπειδή τά z_1 καί z_2 εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν C, ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται συμφώνως πρός τό προηγούμενον θεώρημα, ἡ γ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τόν C. Ὅθεν αἱ εἰκόνες, τῶν γ καί C ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $w = S(z)$, δηλ. αἱ L καί Γ θά εἶναι ὀρθογώνιοι μεταξύ των. (βλ. Σχετικῶς ἄσκησιν 13 ἤ Κεφάλαιον X, §1 Πόρισμα X-1-1). Ἄρα τά σημεῖα W_1 καί W_2 εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν κύκλον Γ.

• <u>Ἐφαρμογαί</u> 1η. Ἔστω ὅτι τό D παριστᾶ τό (ἄνω) ἡμιεπίπεδον $\mathrm{Im}\, z > 0$ καί ἔστω z_0 ὅτι εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ D. Νά εὑρεθῆ ὁ γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (1), $ad-bc \neq 0$, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τό D εἰς τόν δίσκον $|w| < 1$ καί ἐπί πλέον ἱκανοποιεῖ τάς συνθήκας $S(z_0) = 0$ καί $S'(z_0) > 0$. (2)

<u>Λύσις</u>: Λόγῳ τῆς πρώτης τῶν (2) ἔχομεν: $-az_0 = b$. Ἐξ ἄλλου, ἐάν $\bar{z}_0$ εἶναι τό συμμετρικόν τοῦ z_0 ὡς πρός τόν πραγματικόν ἄξονα ox, τότε, συμφώνως πρός τό θεώρημα V-5-2, τά σημεῖα ταῦτα ἀπεικονίζονται ὑπό τοῦ $w = S(z)$ εἰς τά συμμετρικά των ὡς πρός τόν κύκλον $|w| = 1$. Ἐπειδή $S(z_0) = 0$, θά πρέπει τό $S(\bar{z}_0) = \infty$ καί διά νά συμβαίνη τό τελευταῖον ἀρκεῖ $c\bar{z}_0 + d = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $-c\bar{z}_0 = d$. Ὁ (1) λοιπόν γράφεται:

$$w = S(z) = \frac{az - az_0}{cz - c\bar{z}_0} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \qquad (3)$$

Κατά τόν μετασχηματισμόν $w = S(z)$ τό σύνορον τοῦ χωρίου $\mathrm{Im}\, z > 0$ ἀπεικονίζεται εἰς τήν περιφέρειαν $|w| = 1$ καί ὡς ἐκ τούτου τό σημεῖον $z = 0$ τοῦ συνόρου θά ἀπεικονίζεται εἰς κάποιο σημεῖον τῆς περιφερείας $|w| = 1$. Ἐκ τῆς (3) διά $z = 0$ λαμβάνομεν:

$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z_0}{\bar{z}_0}$ ἤ $|w| = \left|\frac{a}{c}\right| \cdot \left|\frac{z_0}{\bar{z}_0}\right|$ ἤ $1 = \left|\frac{a}{c}\right| \cdot 1$. Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος λαμβάνομεν: $\frac{a}{c} = e^{i\theta}$

Ὅθεν, ἡ (3) γράφεται:

$$w = S(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \qquad (4),$$

ὅπου θ εἶναι παράμετρος πού πρέπει νά προσδιορισθῆ.

Λόγω τῆς δευτέρας συνθήκης τῶν (2) ἔχομεν:

$$S'(z_0) = \frac{e^{i\theta}}{z_0 - \bar{z}_0} = \frac{e^{i\theta}}{2i\,\mathcal{J}m\,z_0} > 0 \quad (5).$$

Ἐπειδή $\mathcal{J}m\,z_0 > 0$, ἵνα ἰσχύη ἡ (5), ἀρκεῖ $e^{i\theta} = i$, ὅτε ἡ (4) γράφεται:

$$W = i\,\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (6)$$

21. Ἔστω K ὅτι εἶναι ὁ μοναδιαῖος δίσκος $|z| < 1$ καί ἔστω z_0 εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ K. Νά εὑρεθῆ ἕνας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός $W = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (1), $ad - cb \neq 0$, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τόν K ἐντός τοῦ μοναδιαίου δίσκου $|W| < 1$ καί ἐπί πλέον ἱκανοποιεῖ τάς συνθήκας: $S(z_0) = 0$ καί $S'(z_0) > 0$. (2).

<u>Λύσις</u>: Ἐάν $z_0 = 0$, τότε ὁ ζητούμενος μετασχηματισμός εἶναι προφανῶς ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός $W = z$ (τετριμμένη περίπτωσις). Ἔστω ἤδη $0 < |z_0| < 1$. Λόγω τῆς πρώτης τῶν (2) ἔχομεν $-az_0 = b$. Ἐξ ἄλλου τό συμμετρικόν τοῦ z_0 ὡς πρός τόν κύκλον K εἶναι τό $\frac{1}{\bar{z}_0}$, διότι: $|z_0| \cdot \left|\frac{1}{\bar{z}_0}\right| = 1 = 1^2$.

Τά σημεῖα z_0 καί $\frac{1}{\bar{z}_0}$ ἀπεικονίζονται μέσω τοῦ $W = S(z)$, λόγω τοῦ θεωρήματος V-5-2, εἰς συμμετρικα σημεῖα τοῦ κύκλου $|W| = 1$.

Ἐπειδή $S(z_0) = 0$ θά πρέπει τό $S\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = \infty$ καί ἵνα συμβαίνη τό τελευταῖον, ἀρκεῖ τό $c \cdot \frac{1}{\bar{z}_0} + d = 0$ ἤ $-d \cdot \bar{z}_0 = c$. Ὁ (1) λοιπόν γράφεται:

$$W = S(z) = \frac{az - az_0}{-d\bar{z}_0 z + d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 \cdot z} \quad (3)$$

Ἐπειδή τό σύνορον τοῦ $|z| = 1$ ἀπεικονίζεται εἰς τό σύνορον τοῦ $|W| = 1$, ἕπεται ὅτι τό σημεῖον $z = 1$ ἀπεικονίζεται εἰς κάποιο σημεῖον τοῦ $|W| = 1$.

Ἐκ τῆς (3) διά $z = 1$ λαμβάνομεν:

$$W = \frac{a}{d} \cdot \frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0} \quad \text{καί} \quad |W| = \left|\frac{a}{d}\right| \cdot \frac{|1 - z_0|}{|1 - \bar{z}_0|} \quad \text{ἤ}$$

$1 = \left|\frac{a}{d}\right| \cdot 1$. Ὅθεν, $\frac{a}{d} = e^{i\theta}$. Ἡ (3) λοιπόν γράφεται:

$$W = S(z) = e^{i\theta}\,\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 \cdot z} \quad (4)$$

Ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν σταθερὰν $e^{i\theta}$, θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν συνθήκην $S'(z_0) > 0$ καὶ ἡ ὁποία εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν, λόγω τῆς (4), γράφεται: $S'(z_0) = \frac{e^{i\theta}}{1-|z_0|^2} > 0$ (5). Ἐπειδὴ $0 < |z_0| < 1$, ἵνα ἰσχύῃ ἡ (5), ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν: $e^{i\theta} = 1$.

Ὅθεν, ὁ ζητούμενος μετασχηματισμὸς λόγω τοῦ (4), θὰ εἶναι:

$$W = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 \cdot z}$$

<u>Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις</u>:

1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ εἰς τὰ σημεῖα $W_1 = 1$, $W_2 = i$, $W_3 = -1$.
(<u>Ἀπάντ</u>: $W = (3z + 2i) : (iz + 6)$).

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $z_1 = 0$, $z_2 = -i$, $z_3 = -1$ εἰς τὰ σημεῖα $W_1 = i$, $W_2 = 1$, $W_3 = 0$.
(<u>Ἀπάντ</u>: $W = -i \cdot \left(\frac{z+1}{z-1}\right)$).

3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $z_1 = \infty$, $z_2 = i$, $z_3 = 0$ εἰς τὰ σημεῖα $W_1 = 0$, $W_2 = i$, $W_3 = \infty$.

4. Δείξατε, ὅτι ἡ σύνθεσις δύο γραμμικῶν κλασματικῶν μετασχησματισμῶν εἶναι ἐπίσης ἕνας γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμός.

5. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σταθερὰ σημεῖα τῶν μετασχηματισμῶν:

i) $W = \frac{2z-5}{z+4}$ ii) $W = \frac{6z-9}{z}$

6. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες διὰ τοῦ γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ $W = \frac{z+i}{z-i}$ τῶν κατωτέρω γραμμῶν:

i) $|z-1| = 1$ ii) $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ iii) $|z-i| = 2$ iv) $\tilde{\mathcal{E}}(0,1)$ v) $\tilde{\mathcal{E}}(0,1-i)$ vi) $\tilde{\mathcal{E}}(-1,1+i)$.

7. Νά εὑρεθῆ ὁ διγραμμικός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τά σημεῖα $i, -i, 1$ τοῦ z- ἐπιπέδου εἰς τά σημεῖα $0, 1, \infty$ τοῦ w- ἐπιπέδου.

8. Ἐάν $a \neq b$ εἶναι δύο σταθερά σημεῖα τοῦ διγραμμικοῦ μετασχηματισμοῦ, δείξατε ὅτι οὗτος δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$\frac{w-a}{w-b} = k\left(\frac{z-a}{z-b}\right), \text{ ὅπου } k: \text{σταθερά.}$$

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $a=b$, τότε δείξατε ὅτι οὗτος γράφεται ὑπό τήν μορφήν:

$$\frac{1}{w-a} = \frac{1}{z-a} + k, \text{ ὅπου } k \text{ σταθερά.}$$

9. Δείξατε, ὅτι ὁ πλέον γενικός γραμμικός μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίζει τήν περιφέρειαν $|z|=1$ εἰς τήν περιφέρειαν $|w|=1$, εἶναι ὁ κάτωθι:

$$w = e^{i\theta}\left(\frac{z-p}{\bar{p}\cdot z-1}\right), \text{ ὅπου } p \text{ σταθερά.}$$

10. Δείξατε, ὅτι ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=\frac{z-i}{iz-1}$, τό χωρίον $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ ἀπεικονίζεται εἰς τό χωρίον $|w| \leq 1$.

11. Νά εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες διά τοῦ γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ $w=\frac{z+i}{z-i}$ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου πού ὁρίζονται διά τῶν σχέσεων:

i) $\mathrm{Re}\, z > 0$ ii) $\mathrm{Im}\, z < 0$ iii) $|z-i|>1$ καί $\mathrm{Im}\, z > 0$ iv) $|z-1|>1$ καί $\mathrm{Re}\, z > 0$
v) $|z-1|>1$ καί $\mathrm{Re}\, z>0$. vi) Τῆς γωνίας $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ vii) Τῆς λωρίδος $0<x<1$.

12. Νά εὑρεθοῦν τά σταθερά σημεῖα τοῦ ἀντι-Möbius μετασχηματισμοῦ $w=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

13. Δείξατε ὅτι, ὁ μετασχηματισμός $w=S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$ διατηρεῖ τά μέτρα καί τήν φοράν τῶν γωνιῶν μεταξύ δύο λείων καμπύλων διερχομένων δι' ἑνός δεδομένου σημείου.

14. Ἔστω K εἶναι ἕνας δίσκος καὶ ἔστω z_0 ἕνα σημεῖον τοῦ K. Νὰ εὑρεθῆ ἕνας γραμμικὸς κλασματικὸς μετασχηματισμὸς $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+b}$, $ad-bc \neq 0$, ὅστις ἀπεικονίζει τὸν K ἐντὸς τοῦ μοναδιαίου δίσκου $|w|<1$ καὶ ἐπὶ πλέον ἱκανοποιεῖ τὰς συνθήκας :

$$S(z_0)=0 \text{ καὶ } S'(z_0)>0.$$

15. Ἡ συνάρτησις $w = e^{i\gamma}\cdot\frac{z-b}{z-\bar{b}}$ $(b=a+i\beta,\ \beta>0)$ ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδο ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου κύκλου· εὕρετε: 1) $\arg w(x)=\vartheta(x)$, 2) $w'(b)$, 3) ποῖον μέρος τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου «συστέλλεται» διὰ τῆς ἀνωτέρω ἀπεικονίσεως καὶ ποῖον « διαστέλλεται ».

16. Διὰ τὴν συνάρτησιν $w = e^{ia}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $(|a|<1)$ ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ μοναδιαῖο κύκλο ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, εὕρετε: 1) $\arg w(e^{i\varphi})=\vartheta(\varphi)$, 2) $w'(0)$ καὶ $w'(a)$ 3) ποῖον μέρος τοῦ μοναδιαίου κύκλου « συστέλλεται » καὶ ποῖον « διαστέλλεται » διὰ τῆς ἐν λόγῳ ἀπεικονίσεως 4) $\max\left|\frac{dw}{dz}\right|$ καὶ $\min\left|\frac{dw}{dz}\right|$ διὰ $|z|\leq 1$.

17 Ἀπεικονίσατε τὸν κύκλο $|z|<1$ ἐπὶ τοῦ κύκλου $|w|<1$ οὕτως, ὥστε:

1) $w(1/2)=0$, $\arg w'(1/2)=0$, 2) $w\left(\frac{i}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

3) $w(0)=0$, $\arg w'(0)=-\frac{\pi}{2}$, 4) $w(a)=a$, $\arg w'(a)=\lambda$.

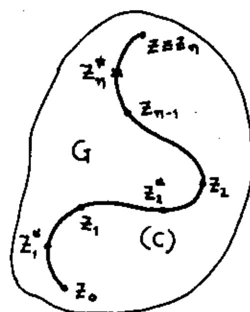
18. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ αἱ ὁποῖαι παραμένουν ἀμετάβλητοι ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $2wz+i(w+z)-2=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

§1. ΒΑΣΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

Θεωροῦμεν μίαν καμπύλην (c) είς τό z-ἐπίπεδον μέ παραμετρικήν ἐξίσωσιν $z=z(t)$, $a\leq t\leq b$. Θά λέγωμεν ὅτι ἡ καμπύλη (c) εἶναι ***λεία***, ἐάν ὑπάρχῃ ἡ παράγωγος $z'(t)$ διά $a\leq t\leq b$, εἶναι συνεχής καί ἐπί πλέον $z'(t)\neq 0$ διά κάθε $t\in[a,b]$.



Σχ. 1

Ἄς θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν $f(z)$ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς ὡρισμένη εἰς ἕνα πεδίον G τοῦ z-ἐπιπέδου καί τήν λείαν καμπύλην (c) ἐντός τοῦ G μέ ἀρχικόν σημεῖον τό z_0 καί τελικόν σημεῖον τό z (βλ. Σχ. 1). Κατά μῆκος τῆς καμπύλης (c) ἐκλέγομεν τά σημεῖα $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\equiv z$ μέ ἄλλους λόγους ἐκτελοῦμεν μίαν διαμέρισιν τοῦ τόξου $\overset{\frown}{z_0 z}$. Τά ἀνωτέρω σημεῖα τά λαμβάνομεν κατά τήν θετικήν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης (c) καί ὡς τοιαύτην θεωροῦμεν τήν διεύθυνσιν διαγραφῆς τῆς (c) ὅταν τό t αὐξάνῃ.

Ἤδη ἄς σχηματίσωμεν τό ἄθροισμα:

$$\sum_{\rho=1}^{n} f(z_\rho^*)\cdot\Delta z_\rho \qquad (1)$$

ὅπου $\Delta z_\rho = z_\rho - z_{\rho-1}$ καί z_ρ^* εἶναι ἕνα τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{z_{\rho-1} z_\rho}$ τοῦ ὁποίου τό μῆκος ἄς καλέσωμεν $\Delta\ell_\rho$.

Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι, τό <u>κάτωθι ὅριον</u>:

$$\lim_{\substack{\max\Delta\ell_\rho\to 0\\ 1\leq\rho\leq n}} \sum_{\rho=1}^{n} f(z_\rho^*)\cdot\Delta z_\rho, \text{ ὅτε καί } n\uparrow\infty,$$

<u>ὑπάρχει ἀνεξαρτήτως τῆς ἐκλογῆς τῶν σημείων</u> z_ρ^* καί z_ρ, τότε ἡ $f(z)$ καλεῖται ***ὁλοκληρώσιμος*** κατά μῆκος τῆς καμπύλης (c) καί τό ὅριον τοῦτο συμβολίζεται οὕτω:

$$\int_c f(z)\,dz$$

καί τό όποῖον (ὅριον) καλεῖται ***ὁλοκλήρωμα*** τῆς $f(z)$ κατά μῆκος τῆς καμπύλης (C).

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\int_c f(z)\,dz \underset{\text{op.}}{=} \lim_{\substack{\max \Delta \ell_\rho \to 0 \\ 1 \leq \rho \leq n}} \sum_{\rho=1}^{n} f(z_\rho^*)\cdot \Delta z_\rho \qquad (2).$$

- Ἄς καλέσωμεν:

$z_\rho = x_\rho + i\, y_\rho$, $z_\rho^* = x_\rho^* + i\, y_\rho^*$, ὅτε $\Delta z_\rho = \Delta x_\rho + i\, \Delta y_\rho$, $\rho = 0, 1, \dots, n$.

Καί ἔστω ὅτι: $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, τότε τό ἄθροισμα (1) δύναται νά λάβη τήν κάτωθι μορφήν:

$$\sum_{\rho=1}^{n} f(z_\rho^*)\cdot \Delta z_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} \left\{ u(x_\rho^*, y_\rho^*) + i\cdot v(x_\rho^*, y_\rho^*) \right\}\cdot \left\{ \Delta x_\rho + i\, \Delta y_\rho \right\} \quad \text{ἤ}$$

$$\sum_{\rho=1}^{n} f(z_\rho^*)\, \Delta z_\rho = \sum_{\rho=1}^{n} \left\{ u(x_\rho^*, y_\rho^*)\, \Delta x_\rho - v(x_\rho^*, y_\rho^*)\, \Delta y_\rho \right\} +$$

$$+ i \cdot \sum_{\rho=1}^{n} \left\{ u(x_\rho^*, y_\rho^*)\, \Delta y_\rho + v(x_\rho^*, y_\rho^*)\, \Delta x_\rho \right\} \qquad (3)$$

Πρότασις VI-1-1. Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ πεδίου G, τό ὁποῖον περιέχει τήν λείαν καμπύλην (C), τότε ἡ $f(z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος κατά μῆκος τῆς (C).

Ἀπόδειξις: Ἡ συνέχεια τῆς $f(z)$ κατά μῆκος τῆς λείας καμπύλης (C) συνεπάγεται, ὡς γνωστόν, τήν συνέχειαν τῶν συναρτήσεων $u(x,y)$ καί $v(x,y)$. Ἐάν λοιπόν ἐκλέξωμεν κατά μῆκος τῆς ἀνωτέρω καμπύλης τήν διαμέρισιν μέ $\max\limits_{1\leq\rho\leq n} \Delta \ell_\rho \to 0$, $n \uparrow \infty$, τοῦτο θά συνεπάγεται ὅτι $\max\limits_{1\leq\rho\leq n} \Delta x_\rho \to 0$ καί $\max\limits_{1\leq\rho\leq n} \Delta y_\rho \to 0$ ὅτε $n \uparrow \infty$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, τό πραγματικόν καί τό φανταστικόν μέρος τοῦ ἀθροίσματος (3) εἶναι τά ὁλοκληρωτικά ἀθροίσματα τῶν ἐπικαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων 6ου εἴδους, ἤτοι τῶν ὁλοκληρωμάτων:

$$\int_c u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy \quad \text{καί} \quad \int_c u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx$$

τά ὁποῖα ὑπάρχουν λόγω τῆς συνεχείας τῶν $u(x,y)$ καί $v(x,y)$ κατά μῆκος τῆς (C). Ὅθεν ἐκ τῆς (3), μετά τήν λῆψιν τῶν ὁρίων, λαμβάνομεν:

$$\int f(z)\,dz = \int u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i \int u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx \qquad (4)$$

τό ὁποῖον ἀποδεικνύει ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

Παρατήρησις: Ἡ σχέσις (4) τήν ὁποίαν συντόμως γράφομεν οὕτω:

$$\int_c f(z)dz = \int_c udx - vdy + i\cdot\int_c udy + vdx \qquad (5)$$

δύναται νά χρησιμοποιηθῆ ὡς ὁρισμός τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς $f(z)$ κατά μῆκος τῆς καμπύλης (c)

Ἰδιότητες τοῦ μιγαδικοῦ ὁλοκληρώματος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἕνας ἀριθμός ἰδιοτήτων τοῦ μιγαδικοῦ ὁλοκληρώματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι προφανεῖς συνέπειαι τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος ἤτοι:

1ον/ $$\int_{\widehat{AB}} f(z)dz = -\int_{\widehat{BA}} f(z)dz$$

2ον/ $$\int_{\widehat{AB}} f(z)dz + \int_{\widehat{B\Gamma}} f(z)dz = \int_{\widehat{A\Gamma}} f(z)dz.$$

3ον/ $$\int_c a\cdot f(z)dz = a\cdot\int_c f(z)dz, \quad a\in\mathbb{C}.$$

4ον/ $$\int_c \{f_1(z)+f_2(z)\}dz = \int_c f_1(z)dz + \int_c f_2(z)dz$$

5ον/ $$\left|\int_c f(z)dz\right| \leq \int_c |f(z)|\,d\ell,$$ ὅπου $d\ell$ εἶναι τό διαφορικόν τοῦ μήκους τοῦ τόξου τῆς καμπύλης (c) καί τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιοῦ μέλους εἶναι ἕνα ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα πρώτου εἴδους κατά μῆκος τῆς καμπύλης (c). (Θεώρημα τοῦ Darboux).

Ἀπόδ: Ἐφαρμόζοντες τήν τριγωνικήν ἰδιότητα ἔχομεν:

$$\left|\int_c f(z)dz\right| = \left|\lim_{\substack{\max\Delta\ell_\rho\to 0\\ 1\leq\rho\leq n}}\sum_{\rho=1}^{n} f(z_\rho^*)\cdot\Delta z_\rho\right| \leq \lim_{\substack{\max\Delta\ell_\rho\to 0\\ 1\leq\rho\leq n}}\sum_{\rho=1}^{n}\left|f(z_\rho^*)\right|\cdot\left|\Delta\ell_\rho\right| = \int_c |f(z)|\,d\ell.$$

6ον/ Ἐάν $\max\limits_{z\in C}|f(z)| = M$ καί ℓ εἶναι τό μῆκος τῆς καμπύλης (c), τότε θά εἶναι:

$$\left|\int_c f(z)dz\right| \leq M\cdot\ell$$

7ην. Ἰσχύει καί ὁ ἀκόλουθος τύπος ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f[\varphi(\zeta)]\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta$$

ὅπου ἡ $z=\varphi(\zeta)$ εἶναι μία ἀναλυτική συνάρτησις τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς ζ καί ἡ ὁποία δημιουργεῖ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοίχισιν μεταξύ τῶν καμπύλων (c) καί Γ.

8ην. Ἐάν $z=z(t)$ εἶναι ἡ παραμετρική ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (c) καί $z(a)$ καί $z(b)$ εἶναι τά ἄκρα αὐτῆς, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]\,z'(t)\,dt$$

• **Παράδειγμα**: Ἔστω (c) εἶναι μία λεία καμπύλη ἑνώνουσα τά σημεῖα z_0 καί z. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\int_C z^n\,dz$.

Λύσις: i). Ἔστω ὅτι $n\neq 0,-1$ καί ὅτι ἡ (c) ἔχει τήν παραμετρικήν ἐξίσωσιν $z=z(t)$ μέ $z_0=z(a)$ καί $z=z(b)$, τότε συμφώνως πρός τήν 8ην ἰδιότητα θά ἔχωμεν:

$$\int_C z^n dz = \int_a^b z^n(t)\cdot z'(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\cdot\int_a^b \frac{d}{dt}\, z^{n+1}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n+1}\, z^{n+1}(t)\,\Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{n+1}\left[z^{n+1}(b)-z^{n+1}(a)\right] = \frac{1}{n+1}\cdot\left(z^{n+1}-z_0^{n+1}\right).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αὐτό τό ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν παραμετρικήν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης (C) ἡ ὁποία ἑνώνει τά σημεῖα z_0 καί z.

ii) Εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν ἡ (c) εἶναι μία κλειστή καμπύλη, τότε $z_0=z$ καί λόγῳ τοῦ ἀνωτέρου ἀποτελέσματος θά ἔχωμεν: $\int_C z^n dz = 0$.

Ἐάν $n=0$, τότε $\int_C dz = \lim\limits_{\substack{\max\Delta\ell_p\to 0\\ 1\le p\le n}} \sum_{p=1}^{n} \Delta z_p = \lim\limits_{\substack{\max\Delta\ell_p\to 0\\ 1\le p\le n}} \sum_{p=1}^{n} (z_p - z_{p-1}) = z_n - z_0 = z - z_0$.

iii) Ἐάν $n=-1$, τότε ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Ἐπειδή $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$, διά κάθε $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, θά ἔχωμεν:

$$I = \int_C \frac{dz}{z} = \int_C \frac{(x-iy)(dx+idy)}{x^2+y^2} = \int_C \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2} + i\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τῶν δύο τελευταίων ὁλοκληρωμάτων θέτομεν $z=\rho\cdot e^{i\theta}$. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = d\,\text{τοξ εφ}\frac{y}{x} = d\theta$ (βλ. Τόμος Β! σελ. 535) θά ἔχωμεν:

$$I = \int_C \frac{\rho d\rho}{\rho^2} + i\int_C d\theta = \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} + i\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \log\frac{\rho}{\rho_0} + i(\theta-\theta_0) \qquad (1),$$

ὅπου ρ_0, ρ εἶναι τά μέτρα τῶν z_0, z καί θ_0, θ εἶναι τά ὀρίσματα τῶν z_0, z ἀντιστοίχως.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$I = \log\rho + i\cdot\theta - (\log\rho_0 + i\cdot\theta_0) = \log z - \log z_0$$

Σημειωτέον ὅτι, $\theta-\theta_0$ παριστᾶ τήν μεταβολήν τοῦ ὀρίσματος τοῦ σημείου z, ὅταν αὐτό τό σημεῖον διαγράφῃ τήν καμπύλην Γ ἀπό τό σημεῖον z_0 μέχρι τοῦ z.

iv). Τέλος ἄς ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα $I = \int_C \frac{dz}{z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ὅπου C εἶναι μία περιφέρεια μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἀκτῖνα ρ.

Ἡ γωνία θ εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως 2π. Συνεπῶς $\theta-\theta_0 = 2\pi - 0 = 2\pi$. Εἶναι δέ καί $\log\frac{\rho}{\rho_0} = \log 1 = 0$. Ὅθεν, ὁ τύπος (1) εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν δίδει:

$$I = \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

• 2ον/. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\int_C \bar{z}dz$ ἀπό τό σημεῖον $z=0$ μέχρι τό σημεῖον $z=4+2i$ κατά μῆκος τῆς καμπύλης c ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $z=t^2+it$.

Λύσις: Τά σημεῖα $z=0$ καί $z=4+2i$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τιμάς $t=0$ καί $t=2$ τῆς παραμέτρου t. Ὅθεν ἔχομεν:

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^2 \overline{(t^2+it)}\, d(t^2+it) = \int_0^2 (t^2-it)(2t+i)dt = \int_0^2 (2t^3-it^2+t)\,dt = 10-\frac{8i}{3}$$

6ος τρόπος: Αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς καμπύλης c εἶναι: $x=t^2$, $y=t$, τό δέ ὁλοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_C \bar{z}dz = \int_C (x-iy)(dx+idy) = \int_C xdx+ydy + i\int_C xdy-ydx$$

$$= \int_0^2 t^2dt^2+tdt + i\int_0^2 t^2dt - tdt^2 = \int_0^2 (2t^3+t)dt + i\cdot\int_0^2 (-t^2)\,dt = 10-\frac{8i}{3}.$$

§ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ CAUCHY-GOURSAT ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ὁ A. Cauchy τό ἔτος 1814 ἔκαμνε τολμηράν χρῆσιν τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου θεωρήσας τά μιγαδικά ὁλοκληρώματα. Ἀπέδειξεν ὅτι: "Ἐάν ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως G εἶναι ἁπλῶς συνεκτικός καί ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐν G καί ἡ $f'(z)$ εἶναι συνεχής ἐν G, τότε τό ὁλοκλήρωμα τῆς $f(z)$ κατά μῆκος κάθε κλειστῆς καμπύλης ἐν G εἶναι μηδέν".

Βραδύτερον ὁ E. Goursat τό 1900 ἀπέδειξε τό ἀνωτέρω θεώρημα μέ τήν ἀσθενεστέραν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ $f'(z)$ ἀρκεῖ νά ὑπάρχῃ καί νά εἶναι πεπερασμένη ἐν G, δι' ὅ καί τό ἀνωτέρω θεώρημα φέρει τήν ὀνομασίαν Θεώρημα τῶν Cauchy-Goursat.

Ἔκτοτε πολλοί μαθηματικοί ἔδωσαν ἁπλάς καί συντόμους ἀποδείξεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Τό θεώρημα τῶν Cauchy-Goursat εἶναι σημαντικόν διά τήν θεωρίαν τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καί δίδει πλείστας, λίαν ἐνδιαφερούσας, ἰδιότητας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καθώς καί ἐφαρμογάς αὐτῶν εἰς τόν ὑπολογισμόν γενικευμένων ὁλοκληρωμάτων διά τῆς μεθόδου τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων (Residium).

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος τῶν Cauchy-Goursat εἶναι ἀναγκαῖον νά προηγηθῇ τό κάτωθι λῆμμα.

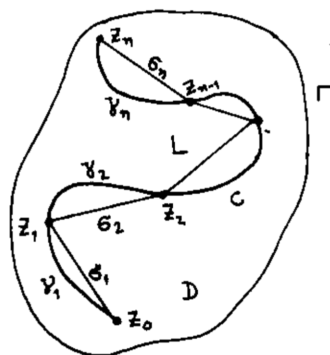
Λῆμμα VI-2-1 Ἔστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής εἰς ἕνα πεδίον G, τό ὁποῖον περιέχει μίαν τμηματικῶς λίαν καμπύλην C. Τότε διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει μία πολυγωνική γραμμή L ἐγγεγραμμένη εἰς τήν C καί περιεχομένη ἐντός τοῦ G τοιαύτη, ὥστε:

$$\left| \int_C f(z)dz - \int_L f(z)dz \right| < \varepsilon .$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω D ἕνα φραγμένο χωρίον περικλεῖον τήν καμπύλην C τοιοῦτον, ὥστε ἡ θήκη αὐτοῦ $\bar{D}$ νά περιέχεται ἐντός τοῦ πεδίου G. Ἄς καλέσωμεν Γ τό σύνορον τοῦ D καί ἔστω ρ ἡ ἀπόστασις τῶν καμπύλων C καί Γ. Ἔστω δέ ℓ τό μῆκος τῆς C. Ἐφ' ὅσον ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ $\bar{D}$ θά εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, ἤτοι: Διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀριθμός $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\left| f(z') - f(z'') \right| < \frac{\varepsilon}{2\ell} \quad \text{διά κάθε } z', z'' \in \overline{D} \text{ μέ } |z' - z''| < \delta.$$

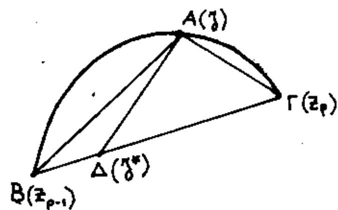
Θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν τῆς καμπύλης C ἔστω τήν $\mathcal{D} = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$, τῆς ὁποίας τά σημεῖα λαμβάνομεν κατά τήν δετικήν φοράν διαγραφῆς αὐτῆς. Διά τῆς διαμερίσεως ταύτης ἡ C χωρίζεται εἰς n τό πλῆθος τόξα, τά ὁποῖα ἄς καλέσωμεν $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (βλ. Σχ.1). Τήν ἀνωτέρω διαμέρισιν λαμβάνομεν εἰς τρόπον, ὥστε τό μῆκος ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω τόξων νά εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\eta = \min(\delta, \rho)$.



Σχ.1

Ἔστω L ἡ πολυγωνική γραμμή ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τήν καμπύλην C μέ κορυφάς τά σημεῖα $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$ καί τῆς ὁποίας τά μήκη τῶν πλευρῶν ἄς τά καλέσωμεν $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ $(\sigma_\rho = z_\rho - z_{\rho-1})$ (Εἰς τό σχῆμα δέν δεικνύεται τό χωρίον D).

Ἤδη δ' ἀποδείξωμεν ὅτι πάντα τά σημεῖα τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς L κεῖνται ἐντός τοῦ χωρίου $\overline{D}$. Ἄς θεωρήσωμεν τό τυχόν τόξον $\widehat{z_{\rho-1} z_\rho} = \widehat{B\Gamma}$ (βλ. Σχ.2) καί ἔστω $A(\zeta)$ ἕνα τυχόν σημεῖον αὐτοῦ καί $\Delta(\zeta^*)$ ἕνα τυχόν σημεῖον τῆς χορδῆς $\overline{z_{\rho-1} z_\rho} \equiv B\Gamma$. Προφανῶς ἰσχύει $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{A\Gamma}| <$ μῆκος $\widehat{B\Gamma} < \eta$ καί $|\overrightarrow{B\Gamma}| < \eta$.



Σχ. 2

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς γεωμετρίας ὅτι:

$$|\overrightarrow{A\Delta}| < \frac{|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{A\Gamma}| + |\overrightarrow{\Gamma B}|}{2} < \frac{\eta + \eta}{2} = \eta$$

Ὅθεν, πάντα τά σημεῖα τῆς L κεῖνται ἐντός τοῦ $\overline{D}$.

Ἄς σχηματίσωμεν τό ἄθροισμα:

$$S_n = \sum_{\rho=1}^{n} f(z_\rho) \cdot \Delta z_\rho \qquad (1)$$

Ἐπειδή $\Delta z_\rho = \int_{\gamma_\rho} dz$ καί ὁ $f(z_\rho)$ εἶναι σταθερός ἀριθμός, τό ἄθροισμα (1) γράφεται οὕτω:

$$S_n = \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\gamma_\rho} f(z_\rho)\, dz \qquad (2)$$

'Εξ ἄλλου, $$\int_C f(z)dz = \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz \qquad (3)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (2) καί (3) λαμβάνομεν:

$$\int_C f(z)dz - S_n = \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\gamma_\rho} \left[f(z) - f(z_\rho) \right] dz \quad (4) \quad \text{ἤ}$$

$$\left| \int_C f(z)dz - S_n \right| \leq \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\gamma_\rho} \left| f(z) - f(z_\rho) \right| d\ell_\rho \qquad (5)$$

Εἶναι ὅμως, $\left| f(z) - f(z_\rho) \right| < \frac{\varepsilon}{2\ell}$, διότι $|z - z_\rho| < \delta$, συνεπῶς ἡ (5) γίνεται:

$$\left| \int_C f(z)dz - S_n \right| \leq \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\gamma_\rho} \frac{\varepsilon}{2\ell}\, d\ell_\rho = \frac{\varepsilon}{2\ell} \cdot \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\gamma_\rho} d\ell_\rho = \frac{\varepsilon}{2\ell} \cdot \sum_{\rho=1}^{n} \ell_\rho = \frac{\varepsilon}{2\ell} \cdot \ell = \frac{\varepsilon}{2}$$

'Εδείχθη ὅτι, $$\left| \int_C f(z)dz - S_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

'Αντικαθιστῶντες τήν καμπύλην C ὑπό τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς L καί τά τόξα γ_ρ ὑπό τῶν χορδῶν σ_ρ, λαμβανομένου δέ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\Delta z_\rho = \int_{\sigma_\rho} dz$, τό ἄθροισμα (1) γράφεται:

$$S_n = \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\sigma_\rho} f(z_\rho) dz \qquad (7)$$

'Εξ ἄλλου, $$\int_L f(z)\, dz = \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\sigma_\rho} f(z) dz \qquad (8)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (7) καί (8) καί λαμβάνοντες ἐν συνεχείᾳ τάς ἀπολύτους τιμάς ἔχομεν:

$$\left| \int_L f(z)dz - S_n \right| \leq \sum_{\rho=1}^{n} \int_{\sigma_\rho} \left| f(z) - f(z_\rho) \right| d\ell_\rho \qquad (9)$$

Εἶναι ὅμως, $\left| f(z) - f(z_\rho) \right| < \frac{\varepsilon}{2\ell}$ ἐπί ἑκάστου τμήματος σ_ρ τοῦ ὁποίου τό μῆκος ἔστω λ_ρ.

Ὅθεν, ἐκ τῆς (9) λαμβάνομεν:

$$\left| \int_L f(z)dz - S_n \right| \leq \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2\ell} \cdot \int_{\sigma_\rho} d\lambda_\rho = \frac{\varepsilon}{2\ell} \cdot \sum_{\rho=1}^{n} \lambda_\rho < \frac{\varepsilon}{2\ell} \cdot \ell = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (10)$$

Συνδυάζοντες τάς (6) καί (10) λαμβάνομεν:

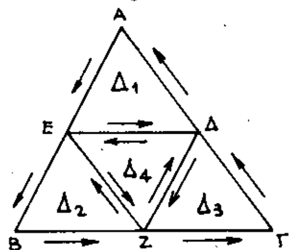
$$\left|\int_C f(z)dz-\int_L f(z)dz\right|\le\left|\int_C f(z)dz-S_n\right|+\left|S_n-\int_L f(z)dz\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Θεώρημα VI-2-1. (Cauchy-Goursat). Ἔστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα ἁπλῶς συνεκτικόν χωρίον G, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_C f(z)dz=0$$

διά κάθε τμηματικῶς λείαν καί κλειστήν καμπύλη C κειμένην ἐντός τοῦ G.

Ἀπόδειξις: Α^ον^ (Περίπτωσις τοῦ τριγώνου) θ' ἀποδείξωμεν κατ' ἀρχάς τό ἀνωτέρω θεώρημα εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ C εἶναι ἡ περίμετρος ἑνός τριγώνου ἔστω τοῦ ΑΒΓ, (βλ. Σχ.1) καί τήν ὁποίαν θά συμβολίζωμεν συντόμως διά τοῦ συμβόλου Δ. Ἑνώνομεν τά μέσα Δ,Ε καί Ζ τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΕ καί ΒΓ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου διά τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΔΕ, ΕΖ καί ΖΔ καί οὕτω ἐσχηματίσθησαν τέσσαρα τρίγωνα τά ὁποῖα θά τά συμβολίζωμεν συντόμως μέ $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ καί Δ_4.



Σχ. 1.

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός καί ἐπί των πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί ἄς δεχθῶμεν ὅτι: $\int_\Delta f(z)dz\neq 0$.

Παραλείποντες, χάριν συντομίας, τήν ὁλοκληρωτέαν συνάρτησιν εἰς τάς ἰσότητας πού ἐπακολουθοῦν εἰς τό δεύτερον μέλος, θά ἔχωμεν:

$$\int_{ΑΒΓΑ} f(z)dz=\int_{ΔΑΕ}+\int_{ΕΒΖ}+\int_{ΖΓΔ}=\left\{\int_{ΔΑΕ}+\int_{ΕΔ}\right\}+\left\{\int_{ΕΒΖ}+\int_{ΖΕ}\right\}+\left\{\int_{ΖΓΔ}+\int_{ΔΖ}\right\}+\left\{\int_{ΔΕ}+\int_{ΕΖ}+\int_{ΖΔ}\right\}$$

$$=\int_{ΔΑΕΔ}+\int_{ΕΒΖΕ}+\int_{ΖΓΔΖ}+\int_{ΔΕΖΔ}=\int_{\Delta_1}f(z)dz+\int_{\Delta_2}f(z)dz+\int_{\Delta_3}f(z)dz+\int_{\Delta_4}f(z)dz.$$

Ὅθεν,
$$\left|\int_\Delta f(z)dz\right|\le\left|\int_{\Delta_1}f(z)dz\right|+\left|\int_{\Delta_2}f(z)dz\right|+\left|\int_{\Delta_3}f(z)dz\right|+\left|\int_{\Delta_4}f(z)dz\right| \qquad (1)$$

Ἐάν παραστήσωμεν μέ $\Delta^{(1)}$ τό τρίγωνον τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τόν ὅρον τοῦ Β^ου^ μέλους

πού λαμβάνει τήν μεγίστην τιμήν (ἐάν ὑπάρχουν δύο ἤ καί περισσότεροι πού ἔχουν τήν ἴδια τιμήν, τότε λαμβάνομεν τόν ἕναν ἐξ αὐτῶν) τότε, θά ἔχωμεν λόγω τῆς (1):

$$\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\right| \qquad (1)$$

Ἐν συνεχεία λαμβάνομεν τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $\Delta^{(1)}$ ἐπιτυγχάνοντες οὕτω ἕνα ἀνάλογον τρίγωνον $\Delta^{(2)}$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{\Delta^{(2)}} f(z)\,dz\right| \quad \text{ἤ λόγω τῆς (2)}$$

$$\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4^2\left|\int_{\Delta^{(2)}} f(z)\,dz\right| \qquad (3)$$

Συνεχίζοντες κατ' αὐτόν τόν τρόπον εὑρίσκομεν ἕνα τρίγωνον $\Delta^{(n)}$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| \qquad (5)$$

Οὕτω ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν φθίνουσαν ἀκολουθίαν τριγώνων $\Delta, \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(n)}, \ldots$ ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχεται εἰς τό προηγούμενόν του ($\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$). Ἡ τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)}$ εἶναι, δυνάμει τοῦ θεωρήματος Ι-1-3 τοῦ Cantor, ἕνα συμπαγές σύνολον. Ἐπειδή ὅμως ἡ ἀκολουθία τῶν διαμέτρων $\delta(\Delta^{(n)})$ τῶν συμπαγῶν συνόλων $\Delta^{(n)}$ τείνει πρός τό μηδέν, διότι $\delta(\Delta^{(n)}) \leq \frac{1}{2^n}\,\delta(\Delta)$, ἡ ἀνωτέρω τομή ἐκφυλίζεται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω z_0.

Ἐπειδή τό σημεῖον z_0 κεῖται ἐντός ἤ ἐπί τοῦ συνόρου τοῦ τριγώνου Δ καί ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό z_0 θά ἔχωμεν:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\cdot f'(z_0) + (z-z_0)\,R(z,z_0) \qquad (6)$$

$$\text{ὅπου} \quad \lim_{z\to z_0} R(z,z_0) = 0$$

Ἐφ' ὅσον $\lim_{z\to z_0} R(z,z_0) = 0$ ἕπεται ὅτι, διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕνα $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διά $|z-z_0| < \delta(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν $|R(z,z_0)| < \varepsilon$

Ὁλοκληρώνοντες τήν (6) κατά μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ $\Delta^{(n)}$ εὑρίσκομεν:

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz = f(z_0)\cdot\int_{\Delta^{(n)}} dz + f'(z_0)\cdot\int_{\Delta^{(n)}} (z-z_0)\,dz + \int_{\Delta^{(n)}} (z-z_0)\,R(z,z_0)\,dz \qquad (7)$$

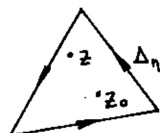
῾Ως γνωστόν, (βλ. παράδειγμα $1^{ον}$) §1, εἶναι

$$\int_{\Delta^{(n)}} dz = \int_{\Delta^{(n)}} (z-z_0)\,dz = 0$$

῞Οθεν, ἡ (7) γράφεται:

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{\Delta^{(n)}} (z-z_0)\cdot R(z,z_0)\,dz \qquad (8)$$

᾿Εάν 2τ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου Δ, τότε ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου $\Delta^{(n)}$ θά εἶναι $\frac{2\tau}{2^n}$. ᾿Εάν z εἶναι ἕνα τυχόν σημεῖον τοῦ τριγώνου $\Delta^{(n)}$ (βλ. Σχ. 2), τότε θά ἔχωμεν $|z-z_0| < \frac{2\tau}{2^n}$. Δυνάμεθα δέ νά εὕρωμεν διά τό δοθέν $\varepsilon > 0$ ἕνα N τοιοῦτον, ὥστε διά $n \geq N$ νά ἔχωμεν: $\frac{2\tau}{2^n} < \delta(\varepsilon)$ καί οὕτω ἐπιτυγχάνομεν: $|z-z_0| < \frac{2\tau}{2^n} < \delta(\varepsilon)$.



Σχ. 2

᾿Εκ τῆς (8) λοιπόν λαμβάνομεν:

$$\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\Delta^{(n)}} |z-z_0|\cdot|R(z-z_0)|\cdot d\ell \leq \frac{2\tau}{2^n}\cdot\varepsilon\cdot\int_{\Delta^{(n)}} d\ell = \frac{2\tau}{2^n}\cdot\varepsilon\cdot\frac{2\tau}{2^n} = \frac{4\tau^2\cdot\varepsilon}{4^n}. \qquad (9)$$

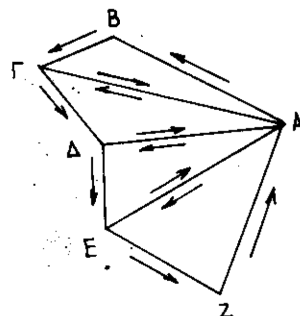
᾿Εξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\left|\int_{\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq 4^n\cdot\frac{4\tau^2\varepsilon}{4^n} = 4\tau^2\cdot\varepsilon \qquad (10)$$

῾Η σχέσις (10) ἰσχύει διά κάθε $\varepsilon > 0$, ὅθεν θά πρέπει:

$$\int_{\Delta} f(z)\,dz = 0$$

$B^{ον}$. (<u>Περίπτωσις ἑνός κλειστοῦ πολυγώνου</u>). ῎Ας θεωρήσωμεν τό κλειστόν πολυγωνικόν χωρίον ΑΒΓΔΕΖ ὡς τοῦτο δεικνύεται εἰς τό Σχῆμα 3 καί ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐπ᾿ αὐτοῦ. Φέρομεν τάς εὐθείας ΑΓ, ΑΔ καί ΑΕ ὅτε τοῦτο χωρίζεται εἰς τά τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ καί ΑΕΖ, ὅπου δι᾿ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, συμφώνως πρός τό $1^{ον}$ βῆμα ἰσχύει τό θεώρημα. Λαμβάνοντες δέ ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι $\int_{ΓΑ} f(z)\,dz = -\int_{ΑΓ} f(z)\,dz$ κ.τ.λ. θά ἔχωμεν:



Σχ. 3.

$$\int_{ΑΒΓΔΕΖΑ} f(z)\,dz = \int_{ΑΒΓΑ} f(z)\,dz + \int_{ΑΓΔΑ} f(z)\,dz + \int_{ΑΔΕΑ} f(z)\,dz + \int_{ΑΕΖΑ} f(z)\,dz = 0.$$

Γ^{ον}. (<u>Περίπτωσις κλειστῆς καμπύλης</u>) Ἄν θεωρήσωμεν τήν τμηματικῶς λεία κλειστή καμπύλη C, τότε συμφώνως πρός τό Λῆμμα VI-2-1, διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει μία κλειστή πολυγωνική γραμμή L τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\left|\int_C f(z)dz-\int_L f(z)dz\right|<\varepsilon \qquad (11)$$

Εἶναι ὅμως, συμφώνως πρός τήν περίπτωσιν τοῦ κλειστοῦ πολυγώνου $\int_L f(z)dz=0$ καί οὕτω ἡ (11) γίνεται:

$$\left|\int_C f(z)dz\right|<\varepsilon \qquad (12)$$

Ἐκ τῆς (12) λοιπόν ἕπεται $\int_C f(z)dz=0$

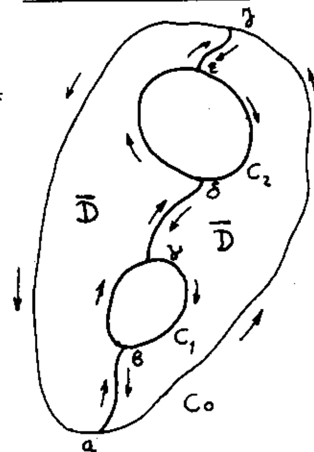
Οὕτω ἐδείχθη τό θεμελιῶδες θεώρημα τῶν Cauchy-Goursat.

- Ἔστωσαν $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n+1$ τό πλῆθος τμηματικῶς λεῖαι καί κλεισταί καμπύλαι τοῦ Jordan τοιαῦται ὥστε, αἱ καμπύλαι $C_1, C_2, \ldots, C_n$ κεῖνται πᾶσαι ἐντός τῆς C_0 καί μή τεμνόμεναι μεταξύ των. Τότε τό σύνολον τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐντός τῆς C_0 καί <u>ἐκτός</u> τῶν n καμπύλων $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ἀποτελεῖ ὡς λέγομεν ἕνα $(n+1)$ - <u>συνεκτικόν πεδίον</u> $\overline{D}$ τοῦ ὁποίου τό σύνορον συνίσταται ἀπό τάς $n+1$ καμπύλας $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Θεώρημα VI-2-2. <u>Ὑπό τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἐάν ἡ</u> $f(z)$ <u>εἶναι ἀναλυτική ἐπί τοῦ</u> $\overline{D}$, <u>τότε θά ἔχωμεν</u>:

$$\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz$$

<u>ὅπου αἱ καμπύλαι</u> $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ <u>θεωροῦνται διαγραφόμεναι κατά τήν θετικήν φοράν</u>.



Σχ. 1.

Ἀπόδειξις: Θ' ἀποδείξωμεν τό ἀνωτέρω θεώρημα διά τήν περίπτωσιν $n=2$ (βλ. Σχ. 1). Πρός τούτοις φέρομεν τά βοηθητικά τόξα $\widehat{a\beta}$, $\widehat{\gamma\delta}$ καί $\widehat{\varepsilon\zeta}$ ὅπως δεικνύεται εἰς τό Σχ. 1. Καί οὕτω τό χωρίον $\overline{D}$ χωρίζεται εἰς δύο κλειστά καί φραγμένα χωρία φρασσόμενα ὑπό τῶν καμπύλων Γ καί Γ΄ εἶναι δέ, Γ=αζεδγβα

και Γ'=αβγδεζα. Συμφώνως πρός τό θεώρημα VI – 2-1 τῶν Cauchy-Goursat θά ἔχωμεν:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0 \quad \text{καί} \quad \int_{\Gamma'} f(z)dz=0$$

Διά προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων εὑρίσκομεν:

$$\left\{\int_{\overrightarrow{\alpha\zeta}}+\int_{\overrightarrow{\zeta\varepsilon}}+\int_{\overrightarrow{\varepsilon\delta}}+\int_{\overrightarrow{\delta\gamma}}+\int_{\overrightarrow{\gamma\beta}}+\int_{\overrightarrow{\beta\alpha}}\right\}+\left\{\int_{\overrightarrow{\alpha\beta}}+\int_{\overrightarrow{\beta\gamma}}+\int_{\overrightarrow{\gamma\delta}}+\int_{\overrightarrow{\delta\varepsilon}}+\int_{\overrightarrow{\varepsilon\zeta}}+\int_{\overrightarrow{\zeta\alpha}}\right\}=0.$$

Λαμβάνοντες δε ὑπ' ὄψιν ὅτι: $\int_{\overrightarrow{\alpha\beta}} f(z)dz=-\int_{\overrightarrow{\beta\alpha}} f(z)dz$ κ.τ.λ. θά λάβωμεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος:

$$\left\{\int_{\overrightarrow{\alpha\zeta}}+\int_{\overrightarrow{\zeta\alpha}}\right\}-\left\{\int_{\overrightarrow{\beta\gamma}}+\int_{\overrightarrow{\gamma\beta}}\right\}-\left\{\int_{\overrightarrow{\delta\varepsilon}}+\int_{\overrightarrow{\varepsilon\delta}}\right\}=0 \quad \text{ἤ}$$

$$\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$$

• **Ἐφαρμογή.** Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{dz}{z}$, ὅπου C εἶναι μία τμηματικῶς λεία καμπύλη τοῦ Jordan ἡ ὁποία: 1ον δέν ἐγκλείει τό σημεῖον $z=0$. 2ον/ Ἐγκλείει τό σημεῖον $z=0$.

Λύσις: 1ον Ἔστω ὅτι ἡ C δέν ἐγκλείει τό σημεῖον $z=0$. Ἐπειδή ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{z}$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός καί ἐπί τῆς καμπύλης C, ἔπεται ὅτι σύμφωνα πρός τό θεώρημα τῶν Cauchy-Goursat θά εἶναι $\int_C \frac{dz}{z}=0$.

2ον/ Ἔστω ὅτι ἡ C ἐγκλείει τό σημεῖον $z=0$. Θεωροῦμεν ἕναν κύκλον C_ρ μέ κέντρον τό σημεῖον $z=0$ καί ἀκτῖνα ρ. Τότε, συμφώνως πρός τό θεώρημα VI-2-2, θά ἔχωμεν:

$$\int_C \frac{dz}{z}=\int_{C_\rho}\frac{dz}{z} \qquad (1)$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά ὑπολογίσωμεν τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα.

Ἐπειδὴ $z=\rho\cdot e^{i\theta}$ θὰ εἶναι $dz=i\cdot\rho\cdot e^{i\theta}\cdot d\theta=i\cdot z\cdot d\theta$ ἢ $\frac{dz}{z}=i d\theta$. Ὅθεν ὁ (1) γίνεται:

$$\int_C \frac{dz}{z}=\int_{C_\rho} i d\theta = i\cdot\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Γενικώτερον θεωροῦμεν τὸ ὁλοκλήρωμα: $\int_C \frac{dz}{z-z_0}$, ὅπου C εἶναι μία τμηματικῶς λεία καμπύλη τοῦ Jordan ἐγκλείουσα τὸ σημεῖον $z=z_0$. Θέτοντες $z-z_0=\zeta$, τότε θὰ ἔχωμεν $dz=d\zeta$ καὶ οὕτω τὸ ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_{C'} \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (2)$$

ὅπου ἡ καμπύλη C' ἐγκλείει τὸ σημεῖον $z=0$. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τ' ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν:

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_{C'} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i$$

Τέλος, ἐὰν τὸ σημεῖον $z=z_0$ κεῖται ἐκτὸς τῆς C, τότε θὰ ἔχωμεν: $\int_C \frac{dz}{z-z_0}=0$, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{z-z_0}$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τῆς C.

<u>Θεώρημα VI-2-3.</u> <u>Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις</u> $f(z)$ <u>εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἕνα ἁπλῶς συνεκτικὸν χωρίον</u> G. <u>Τότε τὸ ὁλοκλήρωμα</u>:

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

<u>λαμβανόμενον κατὰ μῆκος κάθε τμηματικῶς λείας καμπύλης κειμένης ἐντὸς τοῦ</u> G <u>μὲ σταθερὸν τὸ ἀρχικὸν σημεῖον</u> z_0 <u>καὶ μεταβλητὸν τὸ τελικὸν σημεῖον</u> z, <u>ὁρίζει μίαν μονότιμον ἀναλυτικὴν συνάρτησιν ἐντὸς τοῦ</u> G <u>μὲ παράγωγον διδομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως</u> $F'(z)=f(z)$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Θεωροῦμεν τὸ κάτωθι πηλίκον διαφορῶν:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\cdot\left\{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right\}=\frac{1}{\Delta z}\cdot\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta \qquad (1)$$

Τὴν τελευταίαν ὁλοκλήρωσιν θεωροῦμεν ὅτι γίνεται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμή-

ματος πού ἑνώνει τά σημεῖα z καί $z+\Delta z$.

Ἐξ ἄλλου, $f(z)=f(z)\frac{1}{\Delta z}\cdot\int_{z}^{z+\Delta z}d\zeta=\frac{1}{\Delta z}\cdot\int_{z}^{z+\Delta z}f(z)d\zeta$ (2)

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\cdot\int_{z}^{z+\Delta z}\{f(\zeta)-f(z)\}d\zeta \qquad (3)$$

Ἐπειδή ἡ $f(\zeta)$ εἶναι συνεχής εἰς τό σημεῖον z ἕπεται ὅτι, διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἕνα $\delta(\varepsilon)>0$ τοιοῦτον, ὥστε ἐάν $|z-\zeta|<\delta(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$.

Λαμβάνοντες λοιπόν τάς ἀπολύτους τιμάς τῆς (3) καί λόγω τῆς συνεχείας τῆς $f(z)$ καί τῆς $6^{\eta\varsigma}$ Ἰδιότητος τῆς §1 θά ἔχωμεν:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\leq\frac{1}{|\Delta z|}\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}\left|f(\zeta)-f(z)\right|\cdot\left|\Delta z\right|\leq\frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon=\varepsilon,\ \text{διά}\ |z-\zeta|<\delta(\varepsilon).$$

Ὅθεν,
$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z) \quad \text{ἤ}$$

$$F'(z)=f(z).$$

<u>Παρατήρησις</u>: Κατά τήν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δέν ἐκάμναμεν χρῆσιν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις, ἀλλά ὅτι αὕτη εἶναι συνεχής. Δυνάμεθα λοιπον ν' ἀντικαταστήσωμεν τήν ὑπόθεσιν τῆς ἀναλυτικότητος τῆς συναρτήσεως ὑπό τῆς ὑποθέσεως ὅτι, αὕτη εἶναι συνεχής καί ἐπί πλέον τό ὁλοκλήρωμα ταύτης κατά μῆκος κάθε τμηματικῶς λείας κλειστῆς καμπύλης κειμένης ἐντός τοῦ G μηδενίζεται.

Τό ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς ἐπιτρέπει νά ὁρίσωμεν τήν ἔννοιαν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος.

Μία συνάρτησις $F(z)$ τοιαύτη ὥστε $F'(z)=f(z)$ καλεῖται ***ἀόριστον ὁλοκλήρωμα*** ἤ ***παράγουσα*** τῆς $f(z)$ καί συμβολίζεται οὕτω: $\int f(z)dz$.

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ: $F(z)=\int f(z)dz \Longleftrightarrow F'(z)=f(z)$.

π.χ. $\int \eta\mu z\,dz=-\sigma\upsilon\nu z+c$, διότι $\frac{d(-\sigma\upsilon\nu z+c)}{dz}=\eta\mu z$

$\int\frac{dz}{z}=\log z+c$, διότι $\frac{d(\log z+c)}{dz}=\frac{1}{z}$, $0\leq\arg z<2\pi$.

Ὅπως καί διά τάς πραγματικάς συναρτήσεις οὕτω καί διά τάς μιγαδικάς ἰσχύει ὁ τύπος:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\,d\zeta = F(z_2) - F(z_1)$$

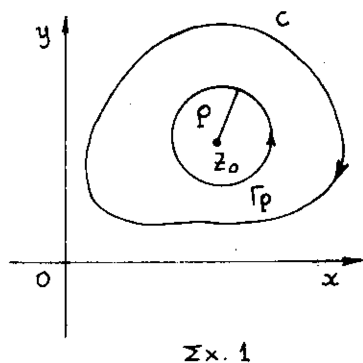
ὅπου $F(z)$ εἶναι ἕνα ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς $f(z)$.

Τό ἀριστερόν μέλος τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἐκφράζει τό "*ὡ ρ ι σ μ έ ν ο ν ὁ λ ο κ λ ή ρ ω μ α*" τῆς $f(\zeta)$ ὡς διαφορά μεταξύ δύο τιμῶν τοῦ ἀορίστου ὁλοκληρώματος αὐτῆς.

§3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ CAUCHY

Θεώρημα VI-3-1 (Πρῶτος ὁλοκλ. τύπος τοῦ Cauchy). Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό πεδίον G περιέχον μίαν τμηματικῶς λεία κλειστή καμπύλη τοῦ Jordan C καθώς καί τά ἐσωτερικά σημεῖα αὐτῆς. Ἐάν τό z_0 εἶναι ἕνα σημεῖον ἐγκλειόμενον ὑπό τῆς C, τότε θά ἔχωμεν:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}$$



Σχ. 1

Ἀπόδειξις: Ἐάν τό z_0 ἐγκλείεται ὑπό τῆς C, τότε ἡ συνάρτησις $f(z)/z - z_0$ εἶναι ἀναλυτική ἐκτός τοῦ σημείου $z = z_0$. Ἐάν Γ_ρ εἶναι ἕνας κύκλος κέντρου z_0 καί ἀκτῖνος ρ (βλ. Σχ. 1) τότε, συμφώνως πρός τό Θεώρημα VI-2-2, θά ἔχωμεν:

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \qquad (1)$$

Ἐπειδή τό ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τοῦ τύπου (1) εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῆς καμπύλης C καί τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιοῦ μέλους θά ἔχη ὁμοίως τήν αὐτήν ἰδιότητα.

Διά τά σημεῖα τῆς περιφερείας Γ_ρ ἔχομεν: $z = z_0 + \rho\cdot e^{i\theta}$.

Διά τῆς ἀντικαταστάσεως τό δεξιόν μέλος τῆς (1) καθίσταται:

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = i\cdot\int_0^{2\pi} f(z)\,d\theta \qquad (2)$$

Εἶναι δέ, $\int_0^{2\pi} f(z)d\theta = \int_0^{2\pi} [f(z)-f(z_0)]d\theta + \int_0^{2\pi} f(z_0)d\theta = \int_0^{2\pi}[f(z)-f(z_0)]d\theta + 2\pi f(z_0)$ (3)

Ἀρκεῖ ἤδη νά δείξωμεν ὅτι $\int_0^{2\pi} [f(z)-f(z_0)]\, d\theta = 0$.

Ἐπειδή ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐπί τοῦ G θά εἶναι τότε καί συνεχής ἐπ' αὐτοῦ ἤτοι, διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕνα $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διά $|z-z_0| < \delta(\varepsilon)$ θά ἔχωμεν: $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$.

Εἶναι δέ, $\left|\int_0^{2\pi}[f(z)-f(z_0)]d\theta\right| \le \int_0^{2\pi}|f(z)-f(z_0)|d\theta \le \int_0^{2\pi}\varepsilon\cdot d\theta = 2\pi\varepsilon$, διά κάθε $\varepsilon > 0$

Ὅθεν, $\int_0^{2\pi} [f(z)-f(z_0)]\, d\theta = 0$ (4)

Λόγῳ τῆς (2) θά ἔχωμεν:

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0) \qquad \text{ἤ}$$

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i\cdot f(z_0)$$

<u>Θεώρημα VI-3-2</u>. (Δεύτερος ὁλοκλ. τύπος τοῦ Cauchy) <u>Ἔστω ἡ</u> $f(z)$ <u>εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα πεδίον</u> G <u>περιέχον μίαν τμηματικῶς λεία κλειστή καμπύλην τοῦ Jordan</u> C <u>καθώς καί τά ἐσωτερικά σημεῖα αὐτῆς</u>. <u>Ἐάν</u> z_0 <u>εἶναι ἕνα σημεῖον ἐγκλειόμενον ὑπό τῆς</u> C, <u>τότε θά ἔχωμεν</u>:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}.$$

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἔστω ἕνα δεύτερον σημεῖον $z_1 \neq z_0$ ἐγκλειόμενον ὑπό τῆς C. Ἐφαρμόζοντες τόν πρῶτον ὁλοκληρωτικόν τύπον τοῦ Cauchy ἔχομεν:

$$\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0} = \frac{1}{2\pi i\cdot(z_1-z_0)}\cdot\int_C f(z)\cdot\left(\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_0}\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_0)} \qquad \text{ἤ}$$

$$\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2} + \frac{(z_1-z_0)}{2\pi i}\cdot\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2\cdot(z-z_1)} \qquad (1)$$

Όταν τό $z_1 \longrightarrow z_0$ τό ἀριστερόν μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος τείνει πρός τήν πραγματικήν συνάρτησιν $f'(z_0)$. Ἵνα ἀποδείξωμεν τό ἀνωτέρω θεώρημα ἀρκεῖ ν'ἀ-δείξωμεν ὅτι:

$$\lim_{z_1 \to z_0} (z_1 - z_0) \cdot \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2 \cdot (z-z_1)} = 0 \qquad (2)$$

Ἵνα ἀποδείξωμεν τήν (2) ἀρκεῖ ν'ἀποδείξωμεν ὅτι διά $z \longrightarrow z_0$ τό ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_1)}$ παραμένει φραγμένον. Ἐπειδή ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐπί τῆς C ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἕνα $M > 0$ τοιοῦτον, ὥστε $|f(z)| \leq M$. Ἔστω ℓ τό μῆκος τῆς C καί $\delta = \inf_{z \in C} |z - z_0|$ εἶναι δέ $\delta > 0$.

Ἐάν $|z_1 - z_0| < \delta$ καί $z \in C$ θά ἔχωμεν:

$$|z - z_1| = |(z - z_0) - (z_1 - z_0)| \geq \delta - |z_1 - z_0| .$$

Ὅθεν,
$$\left| \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2 \cdot (z-z_1)} \right| \leq \int_C \frac{|f(z)|d\ell}{|z-z_0|^2 \cdot |z-z_1|} \leq \frac{M \cdot \ell}{\delta^2 \cdot \{\delta - |z_1 - z_0|\}} .$$

καί οὕτω τοῦ $z_1 \to z_0$ τό ὁλοκλήρωμα φράσσεται ὑπό τοῦ $\frac{M \cdot \ell}{\delta^3}$.

<u>Ὕπαρξις παραγώγων πάσης τάξεως μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως</u>:

Ἡ μέθοδος τῆς ἀποδείξεως ἡ χρησιμοποιηθεῖσα εἰς τά προηγούμενα θεωρήματα δύναται νά χρησιμοποιηθῆ διά τήν ἀπόδειξιν ὑπάρξεως τῆς δευτέρας παραγώγου $f''(z_0)$ καί γενικῶς παραγώγων ἀνωτέρας τάξεως μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$.

<u>**Θεώρημα VI-3-3.**</u> Ἐάν ἡ $f(z)$ <u>εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα πεδίον</u> G, <u>τότε ἡ</u> $f(z)$ <u>ἔχει παραγώγους πάσης τάξεως ἐν</u> G, <u>ἡ δέ παράγωγος</u> $n^{\text{στῆς}}$ <u>τάξεως δίδεται ὑπό τοῦ τύπου</u>:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} , \quad z_0 \in G, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>ὅπου C εἶναι μία τμηματικῶς λεία κλειστή καμπύλη τοῦ Jordan ἐγκλείουσα τό σημεῖον</u> z_0 <u>καί τοιαύτη, ὥστε ἡ C καί τά ἐσωτερικά σημεῖα αὐτῆς νά περιέχωνται εἰς τό</u> G.

Ἀπόδειξις: Ἐάν z_1 ἐγκλείεται ὑπό τῆς c καί εἶναι $z_1 \neq z_0$ χρησιμοποιοῦντες τόν δεύτερον ὁλοκληρωτικόν τύπον τοῦ Cauchy ἔχομεν:

$$\frac{f'(z_1)-f'(z_0)}{z_1-z_0} = \frac{1}{2\pi i(z_1-z_0)} \cdot \int_c f(z)\left\{\frac{1}{(z-z_1)^2} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right\} dz$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \cdot \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3} + \frac{z_1-z_0}{2\pi i} \cdot \int_c f(z)\frac{3(z-z_0)-2(z_1-z_0)}{(z-z_1)^2 \cdot (z-z_0)^3}\, dz$$

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι, ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ἀνωτέρω τύπου τείνει πρός τό μηδέν τοῦ $z_1 \to z_0$. Τοῦτο δέ ἐπιτυγχάνεται διά τῆς μεθόδου πού ἐχρησιμοποιήθη εἰς τό προηγούμενον θεώρημα. Λαμβάνοντες λοιπόν τά ὅρια ἔχομεν:

$$f''(z_0) = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{f'(z_1)-f'(z_0)}{z_1-z_0} = \frac{2!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3}$$

Ὁ τελευταῖος τύπος ἀποδεικνύει τήν ὕπαρξιν τῆς δευτέρας παραγώγου τῆς $f(z)$. Ἤτοι τό θεώρημα ἐδείχθη διά $n=2$. Ἐφαρμόζοντες ἤδη τήν ἐπαγωγικήν μέθοδον ἀποδεικνύομεν τό θεώρημα διά τυχοῦσαν τιμήν τοῦ n.

Παρατήρησις: Ὁ ἀνωτέρω τύπος συχνά ἐμφανίζεται καί οὕτω:

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}$, ὅπου εἰς τήν θέσιν τοῦ z ἐθέσαμεν τό ζ καί εἰς τήν θέσιν τοῦ z_0 τό z.

Ἐφαρμογή 1η Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\int_{|z|=3} \frac{(\eta\mu\pi z^2+\sigma\upsilon\nu\pi z^2)dz}{(z-1)(z-2)}$

Λύσις: Ἐπειδή εἶναι $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ ἔχομεν:

$$I=\int_{|z|=3}\frac{\eta\mu\pi z^2+\sigma\upsilon\nu\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz = \int_{|z|=3}\frac{\eta\mu\pi z^2+\sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-2}\,dz - \int_{|z|=3}\frac{\eta\mu\pi z^2+\sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-1}\,dz$$

Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον τοῦ θεωρήματος VI – 3-1 τοῦ Cauchy διά $z_0=2$ καί $z_0=1$ ἀντιστοίχως ἔχομεν:

$$\int_{|z|=3}\frac{\eta\mu\pi z^2+\sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-2}\,dz = 2\pi\cdot i\left\{\eta\mu\pi\cdot 2^2+\sigma\upsilon\nu\pi\cdot 2^2\right\} = 2\pi\cdot i$$

$$\int_{|z|=3}\frac{\eta\mu\pi z^2+\sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-1}\,dz = 2\pi i\left\{\eta\mu\pi\cdot 1^2+\sigma\upsilon\nu\pi\cdot 1^2\right\} = -2\pi i$$

Ὅθεν, $I=2\pi\cdot i-(-2\pi i) = 4\pi i$

● 29/. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα : $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4}$

__Λύσις__: Ἐφαρμόζομεν τόν γενικόν τύπον τοῦ Cauchy, ἤτοι:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

διά $z_0=-1$, $n=3$ καί $f(z)=e^{2z}$ ἔχομεν:

$$(e^{2z})'''_{z=-1} = \frac{3!}{2\pi i} \cdot \int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4} \qquad \text{ἤ}$$

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}dz}{(z+1)^4} = \frac{2\pi i}{6} \cdot 8e^{-2} = \frac{8\pi i e^{-2}}{3}$$

Μία σπουδαία συνέπεια τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἶναι ἡ ἀκόλουθος.

__Πρότασις VI-3-1.__ __Ἐάν ἡ συνάρτησις__ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ __εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα πεδίον__ G, __τότε αἱ__ $u(x,y)$ __καί__ $v(x,y)$ __ἔχουν μερικάς παραγώγους πάσης τάξεως__.

§ 4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΠΟΡΡΕΟΝΤΑ ΕΚ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ CAUCHY.

__Θεώρημα VI-4-1.__ (Morera). __Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις__ $f(z)$ __εἶναι συνεχής εἰς τό πεδίον__ G __καί ὑποθέτομεν__:

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

__κατά μῆκος κάθε τμηματικῶς λείας κλειστῆς καμπύλης__ C __κειμένης ἐντός τοῦ__ G, __τότε ἡ__ $f(z)$ __εἶναι ἀναλυτική__.

__Ἀπόδειξις__: Συμφώνως πρός τό Θεώρημα VI-2-3 καί τήν Παρατήρησιν τῆς §2 τό ὁλοκλήρωμα:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

λαμβανόμενον κατά μῆκος μιᾶς τμηματικῶς λείας καμπύλης C κειμένης ἐντός τοῦ G μέ ἀρχικόν σημεῖον τό z_0 καί τελικόν σημεῖον τό z, ὁρίζει μίαν μονότιμον ἀναλυτικήν συνάρτησιν ἐντός τοῦ G τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος $F'(z)=f(z)$. Ἀλλά, συμφώνως πρός τό Θεώρημα VI-3-3, ἐφ' ὅσον ἡ $F(z)$ εἶναι ἀναλυτική θά ἔχῃ παραγώγους πάσης τάξεως διά κάθε $z \in G$, ἤτοι ὑπάρχει ἡ $F''(z)$ καί εἶναι $F''(z)=f'(z)$. Ὅθεν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική.

Θεώρημα VI-4-2. (Cauchy-Liouville). Κάθε συνάρτησις ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον καί φραγμένη εἶναι σταθερά.

Ἀπόδειξις: Διά κάθε $z \in \mathbb{C}$ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως: $|f(z)| < M$, ὅπου $M > 0$ (σταθερά). Θεωροῦμεν ἕναν κύκλον C ἀκτῖνος R μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων. Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα VI-3-2 τοῦ Cauchy ἔχομεν:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_C \frac{|f(\zeta)|d\ell}{|\zeta - z|^2} \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως, $|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| = R - |z|$. Ὅθεν ἡ (1) γράφεται:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R}{(R-|z|)^2} = \frac{M \cdot R}{(R-|z|)^2} \qquad (2)$$

Ἐάν $R \to \infty$ τότε ἐκ τῆς (2) προκύπτει ὅτι $f'(z) = 0$, συνεπῶς $f(z) =$ σταθερά διά κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Ἐπέκτασις τοῦ θεωρήματος τῶν Cauchy-Liouville.

Θεώρημα VI-4-3. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ ἐπιπέδου. Θεωροῦμεν μίαν ἀκολουθίαν ὁμοκέντρων κύκλων τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες τείνουν πρός τό ἄπειρον. Ἐάν ἀπό μίαν ὡρισμένην περιφέρειαν καί μετά ἡ συνάρτησις $f(z) \cdot z^{-k}$, $k > 0$ παραμένη φραγμένη, τότε ἡ $f(z)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον βαθμοῦ οὐχί μεγαλυτέρου τοῦ k.

Ἀπόδειξις: Ἔστω C ἕνας κύκλος μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἀκτῖνα R καί $M = \sup_{\zeta \in C} |f(\zeta)|$. Ἔστω δέ z ἕνα τυχόν ἐσωτερικόν σημεῖον τοῦ κύκλου C. Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα VI-3-2 τοῦ Cauchy ἔχομεν:

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(\zeta)|d\ell}{(R-|z|)^{n+1}} \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R}{(R-|z|)^{n+1}}$$

Ὅθεν,

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M \cdot R^{k+1}}{(R-|z|)^{n+1}} \qquad (1)$$

Ἐάν $n > k$ καί τό $R \to \infty$ ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι $|f^{(n)}(z)| = 0$, συνεπῶς $f^{(n)}(z) = 0$ διά $n > k$. Ὅθεν, ἡ $f(z)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον βαθμοῦ $\leq k$. Τό ἀντίστροφον εἶναι τετριμμένη περίπτωσις.

Θεώρημα VI-4-4. (Θεμελιώδες Θεώρημα τῆς Ἀλγεβρας). Κάθε πολυωνυμική συνάρτησις $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ μέ $n \geq 1$ καί $a_n \neq 0$ ἔχει μίαν τουλάχιστον ρίζαν. (Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ἡ $P(z)=0$ ἔχει n τό πλῆθος ρίζας).

Ἀπόδειξις: Τό πολυώνυμον $P(z)$ γράφεται $P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right) \longrightarrow \infty$ καθώς τό $z \longrightarrow \infty$. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό $P(z)$ δέν ἔχει ρίζας, τότε ἡ συνάρτησις $\frac{1}{P(z)} = Q(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον καί ἐπί πλέον $|Q(z)| \longrightarrow 0$ τοῦ $z \to \infty$, ἤτοι ἡ $|Q(z)|$ εἶναι φραγμένη. Ὅθεν, συμφώνως πρός τό Θεώρημα VI-4-2 τοῦ Liouville, ἡ $Q(z)$ ἄρα καί ἡ $P(z)$ θά πρέπει νά εἶναι σταθερά, ὅπερ ἄτοπον.

Θεώρημα VI-4-5. (Ἀνισότης τοῦ Cauchy). Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐπί ἑνός κύκλου C κέντρου z καί ἀκτῖνος R τότε ἰσχύει: $\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$, ὅπου $M = \sup_{\zeta \in C} |f(\zeta)|$.

Ἀπόδειξις: Εἶναι $|\zeta - z| = R$. Συμφώνως πρός τό θεώρημα VI-3-2 τοῦ Cauchy ἔχομεν:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad \text{καί}$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \int_C \frac{|f(\zeta)|\, d\ell}{|\zeta - z|^{n+1}} \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R}{R^{n+1}} = \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

Θεώρημα VI-4-6. (Θεώρημα τῆς Μέσης τιμῆς-Gauss). Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό ἐσωτερικόν καί ἐπί τῆς περιφερείας ἑνός κύκλου C κέντρου z_0 καί ἀκτῖνος R τότε ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως εἰς τό κέντρον τοῦ κύκλου ἰσοῦται πρός τήν μέσην ἀριθμητικήν τῆς συναρτήσεως κατά μῆκος τῆς περιφερείας, ἤτοι:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta})\, d\theta.$$

Ἀπόδειξις: Διά τά ζ τῆς περιφερείας ἔχομεν: $\zeta = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$, ὅτε $\zeta - z_0 = R \cdot e^{i\theta}$ καί $d\zeta = i \cdot R \cdot e^{i\theta}\, d\theta$ καί οὕτω ὁ τύπος τοῦ θεωρήματος VI-3-1 τοῦ Cauchy γίνεται:

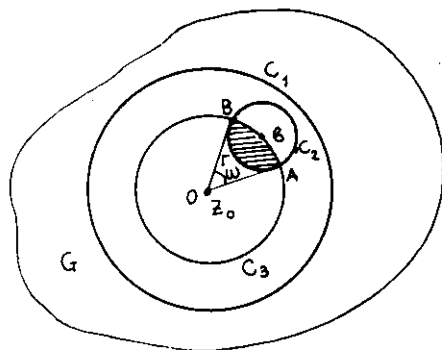
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta} d\theta}{R \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta})\, d\theta$$

§ 5. ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΑΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Θεώρημα VI-5-1. Ἔστω μία συνάρτησις $f(z)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική εἰς τό φραγμένον πεδίον G καί συνεχής εἰς τό κλειστόν πεδίον $\bar{G}$. Τότε τήν μεγίστην τιμήν ἡ $|f(z)|$ τήν λαμβάνει ἐπί τοῦ συνόρου τοῦ G, ἐκτός ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι σταθερά ἐπί τοῦ G. δηλ. ὑπάρχει σημεῖον ζ τοῦ συνόρου τοῦ G τοιοῦτον, ὥστε: $|f(\zeta)| = \max\limits_{z\in\bar{G}} |f(z)|$.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$ τῶν δύο μεταβλητῶν εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ κλειστοῦ πεδίου $\bar{G}$. Ὅθεν, Τόμος Β΄. θεώρ. V-1-1 αὐτή λαμβάνει μίαν μεγίστην τιμήν, ἔστω Μ, εἰς κάποιο σημεῖον $z_0=(x_0,y_0)\in\bar{G}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι: $M=|f(z_0)|\geq|f(z)|$ (1) διά κάθε $z\in\bar{G}$. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό σημεῖον z_0 εἶναι ἕνα ἐσωτερικόν σημεῖον τοῦ πεδίου $\bar{G}$ (βλ. Σχ. 1).

Ἔστω C_1 ἕνας κύκλος ἐντός τοῦ πεδίου G μέ κέντρον τό σημεῖον z_0. Ἐξαιροῦντες τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι σταθερά ἐπί τῆς περιφερείας C_1, τότε θά πρέπει νά ὑπάρχη ἕνα σημεῖον, ἔστω β, τοιοῦτον ὥστε $|f(\beta)|<M$ ἤ ὑπάρχει ἕνα $\varepsilon>0$ ὥστε νά ἔχωμεν $|f(\beta)|=M-\varepsilon$, $\varepsilon>0$:



Σχ. 1.

Ἐπειδή ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ $\bar{G}$ αὐτό σημαίνει διά κάθε $\varepsilon>0$ συνεπῶς καί διά τό ἀνωτέρω ὁρισθέν $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἕν $\delta>0$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$|f(z)-f(\beta)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διά } |z-\beta|<\delta. \qquad (2)$$

$$\text{δηλ.} \quad |f(z)|<|f(\beta)|+\frac{\varepsilon}{2}=M-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}=M-\frac{\varepsilon}{2} \qquad (3).$$

Ἡ σχέσις (3) ἰσχύει δι' ὅλα τά ἐσωτερικά σημεῖα τοῦ κύκλου κέντρου β καί ἀκτῖνος $\delta>0$ (βλ. Σχ. 1).

Ἤδη κατασκευάζομεν ἕναν κύκλον C_3 μέ κέντρον τό z_0 διερχόμενον διά τοῦ σημείου β. Διά τά z τοῦ μέρους τοῦ κύκλου αὐτοῦ ὁ ὁποῖος τέμνεται ὑπό τοῦ κύκλου C_2 καί τό ὁποῖον ἄς καλέσωμεν ΑΒΓ ἔχομεν ἰσχύουσαν τήν σχέσιν (3). ἤτοι: $|f(z)|<M-\frac{\varepsilon}{2}$. Διά δέ τά z τοῦ ἐναπομένοντος τμήματος τοῦ C_3 θά ἔχωμεν: $|f(z)|\leq M$.

Ἔστω $\measuredangle AOB=\omega$ (μετρουμένη ἀπό τήν θέσιν ΟΑ καί κατά τήν ἀντίθετον φοράν

πρός τήν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου) καί ἔστω $r=|\beta-z_0|$. Συμφώνως πρός τό θεώρημα VI-4-6 τοῦ Gauss ἔχομεν:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega} f(z_0+r\cdot e^{i\theta})\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega}^{2\pi} f(z_0+r\cdot e^{i\theta})\,d\theta$$

Ὅθεν, $$|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega}|f(z_0+r\cdot e^{i\theta})|\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega}^{2\pi}|f(z_0+r\cdot e^{i\theta})|\,d\theta$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega}\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega}^{2\pi}M\,d\theta=\frac{\omega}{2\pi}\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{M}{2\pi}(2\pi-\omega)=M-\frac{\omega\cdot\varepsilon}{4\pi}.$$

δηλ. $M=|f(z_0)|\le M-\frac{\omega\cdot\varepsilon}{4\pi}$, τό ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ $|f(z)|$ δέν δύναται νά λαμβάνῃ μεγίστην τιμήν εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ G καί κατ' ἀνάγκην τήν μεγίστην τιμήν θά πρέπει νά τήν λαμβάνῃ ἡ $|f(z)|$ ἐπί τοῦ συνόρου τοῦ G.

Θεώρημα VI-5-2. Ἔστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐπί τοῦ φραγμένου πεδίου G καί συνεχής εἰς τό κλειστόν πεδίον $\bar{G}$ καί ἐπί πλέον δέν μηδενίζεται διά κάθε $z\in G$. Τότε ἡ $|f(z)|$ λαμβάνει μίαν ἐλαχίστην τιμήν ἐπί τοῦ συνόρου τοῦ G.

Ἀπόδειξις: Ἡ $f(z)$ θά εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ $\bar{G}$ καί ἐπί πλέον εἶναι $f(z)\neq 0$. Ὅθεν καί ἡ συνάρτησις $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$ θά εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ $\bar{G}$ καί συμφώνως πρός τό προηγούμενον θεώρημα ἡ $|\varphi(z)|$ θά λαμβάνῃ μίαν μεγίστην τιμήν οὐχί ἐπί τοῦ G ἀλλά ἐπί τοῦ συνόρου τούτου. Ἄρα καί ἡ $|f(z)|=\frac{1}{|\varphi(z)|}$ θά λαμβάνῃ μίαν ἐλαχίστην τιμήν ἐπί τοῦ συνόρου G.

Πόρισμα VI-5-1. Ἔστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐπί τοῦ φραγμένου πεδίου G καί συνεχής εἰς τό πεδίον $\bar{G}$ μή μηδενιζομένη διά κάθε $z\in G$ καί ἐπί πλέον εἶναι σταθερά ἐπί τοῦ συνόρου τοῦ G. Τότε ἡ $f(z)$ εἶναι σταθερά ἐπί τοῦ $\bar{G}$.

Ἀπόδειξις: Ἔστω Γ τό σύνορον τοῦ G. Τότε, συμφώνως πρός τά προηγούμενα θεωρήματα, ὑπάρχουν δύο σημεῖα ἔστωσαν ζ καί ζ' τοῦ συνόρου Γ τοιαῦτα ὥστε δι' αὐτά ἡ $|f(z)|$ νά λαμβάνῃ τήν μεγίστην καί ἐλαχίστην τιμήν ἀντιστοίχως ἐπί τοῦ Γ.

Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως $|f(\gamma)| = |f(\gamma')|$, συνεπῶς $\max_{z\in\bar G}|f(z)| = \min_{z\in\bar G}|f(z)|$. Ὅθεν, ἡ $|f(z)|$ εἶναι σταθερά ἐπί τοῦ $\bar G$. Τότε συμφώνως πρός τήν 2αν Ἐφαρμογήν τῆς § 3 τοῦ Κεφ. III ἡ $f(z)$ θά εἶναι σταθερά ἐπί τοῦ $\bar G$.

§ 6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΙΣ ΤΑΣ ΑΡΜΟΝΙΚΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ ἀρχή τοῦ μεγίστου καί ἐλαχίστου μέτρου μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εὑρίσκει ἕναν ἱκανοποιητικόν ἀριθμόν ἐφαρμογῶν εἰς τάς ἁρμονικάς συναρτήσεις. Παραθέτομεν κατωτέρω μερικάς ἐξ αὐτῶν.

Πρότασις VI-6-1. Ἐάν ἡ $u(x,y)$ εἶναι μία ἁρμονική συνάρτησις καί διάφορος σταθερᾶς ἐντός τοῦ πεδίου G, τότε ἡ $u(x,y)$ δέν λαμβάνει οὔτε τήν μεγίστην οὔτε τήν ἐλαχίστην της τιμήν ἐντός τοῦ G.

Ἀπόδειξις: Ἔστω (x_0,y_0) ἕνα σημεῖον τοῦ G καί ἔστω K μία περιοχή τοῦ (x_0,y_0) εὑρισκομένη ἐντός τοῦ G. Θεωροῦμεν τήν ἀναλυτικήν συνάρτησιν $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ἐντός τῆς περιοχῆς K τότε καί ἡ συνάρτησις μέ τύπον $F(z)=e^{f(z)}$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τῆς περιοχῆς K, διότι, $F'(z)=e^{f(z)}\cdot f'(z)$. Ἐπί πλέον ἡ συνάρτησις $F(z)$ δέν μηδενίζεται ἐντός τῆς περιοχῆς K καί ἔχει μέτρον $|F(z)|=|e^{u(x,y)}\cdot e^{iv(x,y)}| = |e^{u(x,y)}|\cdot|e^{iv(x,y)}| = e^{u(x,y)}\cdot 1 = e^{u(x,y)}$.

Ἡ συνάρτησις $u(x,y)$ δέν δύναται νά ἔχη ἕνα μέγιστον εἰς τό σημεῖον (x_0,y_0), διότι τότε καί ἡ συνάρτησις $|F(z)|$ θά ἐλάμβανεν ἕνα μέγιστον εἰς τό σημεῖον $z_0=x_0+iy_0\in K$ γεγονός πού ἀντιβαίνει πρός τό θεώρημα VI-5-1 (Ἀρχή τοῦ μεγίστου μέτρου). Ἀναλόγως ἡ $u(x,y)$ δέν δύναται νά λαμβάνη ἕνα ἐλάχιστον εἰς κάποιο σημεῖον (x_0',y_0'), διότι τότε καί ἡ $|F(z)|$ θά ἐλάμβανε ἕνα ἐλάχιστον εἰς τό σημεῖον $z_0'=x_0'+iy_0'\in K$ γεγονός πού ἀντιβαίνει πρός τό θεώρημα VI-5-2 (Ἀρχή τοῦ Ἐλαχίστου Μέτρου).

Πρότασις VI-6-2 Ἔστω G ἕνα φραγμένον πεδίον καί $u(x,y)$ μία ἁρμονική συνάρτησις ἐντός τοῦ G καί συνεχής ἐντός τοῦ $\bar G$. Τότε τό σύνορον τοῦ G περιέχει δύο σημεῖα (ξ,η) καί (ξ',η') τοιαῦτα, ὥστε $u(\xi,\eta)=\max_{(x,y)\in\bar G}u(x,y)$, $u(\xi',\eta') = \min_{(x,y)\in\bar G}u(x,y)$.

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν τὴν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Ὡς ἐδείχθη καὶ εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν ἡ συνάρτησις $F(z)=e^{f(z)}$ εἶναι ἀναλυτική. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VI-5-1 ὑπάρχει ἕνα σημεῖον $\zeta=\xi+i\eta$ τοῦ συνόρου τοῦ G τοιοῦτον, ὥστε ἡ $|F(\zeta)|=\max_{z\in\bar{G}}|F(z)|$, ἤτοι $e^{u(\xi,\eta)}=\max_{(x,y)\in\bar{G}} e^{u(x,y)}$ καὶ κατὰ συνέπειαν $u(\xi,\eta)=\max_{(x,y)\in\bar{G}}u(x,y)$. Ἀνάλογος ἀπόδειξις καὶ διὰ τὸ ἐλάχιστον.

<u>Πρότασις VI-6-3.</u> <u>Ἔστω τὸ φραγμένον πεδίον G καὶ ἡ συνάρτησις $u(x,y)$ ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ G καὶ συνεχὴς ἐντὸς τοῦ $\bar{G}$. Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G. Τότε ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ παντοῦ ἐντὸς τοῦ G.</u>

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G, ἕπεται συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν ὅτι ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G εἶναι ἴσαι καὶ ὡς ἐκ τούτου καὶ πᾶσαι αἱ "ἐνδιάμεσοι" τιμαὶ ποὺ λαμβάνει ἡ $u(x,y)$ ἐντὸς τοῦ G εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ μάλιστα ἴσαι πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου τῆς $u(x,y)$ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G. Ἄρα ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ ἐντὸς τοῦ G.

<u>Πόρισμα VI-6-1.</u> <u>Ἔστω τὸ φραγμένον πεδίον G καὶ $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ δύο ἁρμονικαὶ συναρτήσεις ἐντὸς τοῦ G καὶ συνεχεῖς ἐντὸς τοῦ $\bar{G}$. Ὑποθέτομεν, ὅτι εἰς κάθε σημεῖον τοῦ συνόρου G εἶναι $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$. Τότε $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$ παντοῦ ἐντὸς τοῦ $\bar{G}$.</u>

Ἀπόδειξις: Ἡ συνάρτησις $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ ἱκανοποιεῖ τὰς ὑποθέσεις τῆς προηγουμένης προτάσεως καὶ εἶναι μηδὲν παντοῦ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G. Συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἡ $u(x,y)$ θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς μηδὲν διὰ κάθε $(x,y)\in\bar{G}$, δηλ. θὰ ἔχωμεν $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$ διὰ κάθε $(x,y)\in\bar{G}$.

<u>Πρότασις VI-6-4.</u> <u>Ἔστω ἡ συνάρτησις $F(W)=F(u+iv)$ ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονικὴ εἰς τὸ πεδίον D καὶ ἡ συνάρτησις $W=f(z)=f(x+iy)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ πεδίον G λαμβάνουσα τὰς τιμάς της ἐντὸς τοῦ D. Τότε ἡ σύνθεσις τῶν συναρτήσεων $F(f(z))$ εἶναι ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ G.</u>

Ἀπόδειξις. Θεωροῦντες τὴν F ὡς συνάρτησιν τῶν u καὶ υ, ὅπου u=u(x,y) καὶ υ=υ(x,y) καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν §8,II τοῦ Κεφ. III, Β^{ου} τόμου θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= (u'_x+i\upsilon'_x)^2\frac{d^2F}{dw^2} + (u''_{xx}+i\upsilon''_{xx})\frac{dF}{dw}\\ \text{καὶ}\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= (u'_y+i\upsilon'_y)^2\frac{d^2F}{dw^2} + (u''_{yy}+i\upsilon''_{yy})\frac{dF}{dw}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς συνθήκας Cauchy-Riemann, ἤτοι: $u'_x=\upsilon'_y$ καὶ $u'_y=-\upsilon'_x$ καθὼς καὶ τὰς σχέσεις $u''_{xx}+u''_{yy}=0$, $\upsilon''_{xx}+\upsilon''_{yy}=0$ (αἱ u,υ εἶναι ἁρμονικαὶ συναρτήσεις) διὰ προσθέσεως τῶν (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν τελικῶς $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$, ἤτοι ἡ F εἶναι ἁρμονική.

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

1. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_c (12z^2-4\,i\cdot z)\,dz$ κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης c μὲ ἐξίσωσιν $y=x^3-3x^2+4x-1$ καὶ μὲ ἀρχικὸν σημεῖον τὸ (1,1) καὶ τελικὸν τὸ (2,3).

2. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_c |z|\,dz$, ὅπου ἡ καμπύλη c εἶναι:
   i) Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον $z=2-i$.
   ii) Τὸ ἡμικύκλιον $|z|=1$, $0\le \arg z\le \pi$ (Ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ σημεῖον $z=1$).
   iii) Τὸ ἡμικύκλιον $|z|=1$, $-\frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{\pi}{2}$ (Ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ σημεῖον $z=-i$)
   iv) Ὁ κύκλος $|z|=R$.

3. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_c |z|\cdot\bar{z}\,dz$, ὅπου C εἶναι κλειστὴ καμπύλη ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ τὸ ἄνω ἡμικύκλιον $|z|=1$ καὶ ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $-1\le x\le 1, y=0$.

4. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_c \frac{dz}{z^2+1}$, ἐὰν c εἶναι:
   i) Ὁ κύκλος $|z-i|=1$
   ii) Ὁ κύκλος $|z+i|=1$
   iii) Ὁ κύκλος $|z|=2$

   (Πάντες οἱ κύκλοι διαγράφονται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν).

5. Ὑπολογίσατε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{|z-a|=R}\frac{(z^4+z^2+1)\,dz}{z(z^2+1)}$ συναρτήσει τοῦ R.

6. Δείξατε ὅτι: $\int F(z)\cdot G'(z)\,dz = F(z)\cdot G(z) - \int F'(z)G(z)\,dz$ καί ἐν συνεχεία ὑπολογίσατε τά ὁλοκληρώματα:

i) $\int z e^{3z} dz$ ii) $\int z^2 \eta\mu 4z\, dz$

iii) $\int_c (z+2)e^{iz} dz$ κατά μῆκος τῆς παραβολῆς τῆς ὁριζομένης ὑπό τῆς ἐξισώσεως $\pi^2 y = x^2$ ἀπό τό σημεῖον $(0,0)$ μέχρι τό $(\pi,1)$.

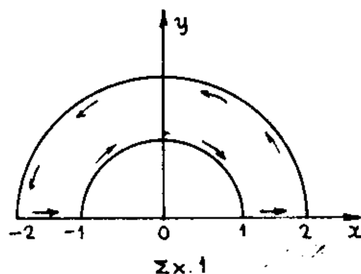
7. Ἄνευ τῆς χρήσεως τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τύπου τοῦ Cauchy νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_c \frac{dz}{(z-a)^n}$, $n=2,3,4,\dots$ ὅπου a εἶναι ἕνα ἐσωτερικόν σημεῖον τῆς λείας κλειστῆς καμπύλης τοῦ Jordan c.

8. Δείξατε ὅτι $\int_c \frac{dz}{z^2+1} = 0$, ἐάν c εἶναι μία τμηματικῶς λεία κλειστή καμπύλη τοῦ Jordan περιεχομένη εἰς τόν δακτύλιον $1 < |z| < R$.

9. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_{|z|=1} z^a dz$, ὅπου a εἶναι ἕνας αὐθαίρετος μιγαδικός ἀριθμός καί $1^a = 1$.

10. Δείξατε ὅτι $\int_{|z|=1} a^z dz = 0$ διά κάθε ἐκλογή τῆς ἀρχικῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως a^z.

11. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα $\int_c \frac{z\,dz}{\bar{z}}$, ὅπου c εἶναι τό σύνορον τοῦ ἡμιδακτυλίου τοῦ δεικνυομένου εἰς τό Σχ. 1.



Σχ. 1

12. Δείξατε ὅτι: 1ον/ Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής εἰς μίαν περιοχήν τῆς ἀρχῆς, τότε:

$$\lim_{\rho\to 0} \int_0^{2\pi} f(\rho\cdot e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi f(0)$$

2ον/ Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $z=a$, τότε:

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$$

13. Δείξατε ὅτι: $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ δι' ὅλας τάς καμπύλας C_1 καί C_2 περιεχομένας

εἰς ἕνα δοθὲν πεδίον G μὲ τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν καὶ τελικὸν σημεῖον, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $\int_c f(z)dz=0$ διὰ κάθε λεία κλειστὴ καμπύλη c περιεχομένη ἐντὸς τοῦ G.

14. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὁλοκλήρωμα : $\int_c \frac{dz}{z^2+9}$, ἐάν :

i) Τὸ σημεῖον 3i κεῖται ἐντὸς τῆς καμπύλης c καὶ τὸ σημεῖον −3i κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς.

ii) Τὸ σημεῖον −3i κεῖται ἐντὸς τῆς καμπύλης c καὶ τὸ σημεῖον 3i κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς.

iii) Ἀμφότερα τὰ σημεῖα 3i καὶ −3i κεῖνται ἐντὸς τῆς καμπύλης c.

15. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὁλοκλήρωμα: $\int_c \frac{z\cdot e^z dz}{(z-a)^3}$, ὅπου τὸ σημεῖον a κεῖται ἐντὸς τῆς καμπύλης c.

16. Ὑπολογίσατε τὸ ὁλοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^z dz}{z(1-z)}$, ἐάν :

i) Τὸ σημεῖον 0 κεῖται ἐντὸς τῆς καμπύλης c καὶ τὸ σημεῖον 1 κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς.

ii) Τὸ σημεῖον 1 κεῖται ἐντὸς καὶ τὸ σημεῖον 0 κεῖται ἐκτὸς τῆς c.

iii) Τὰ σημεῖα 0 καὶ 1 κεῖνται ἀμφότερα ἐντὸς τῆς καμπύλης c.

17. Δείξατε ὅτι, ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}|P(t)|\,dt$, ὅπου $P(t)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς t, συγκλίνῃ, τότε ἡ συνάρτησις $F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(t)dt}{t-z}$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἕκαστον τῶν χωρίων $\Im m z>0$ καὶ $\Im m z<0$.

18. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὁλοκλήρωμα: $\int_{|z|=1}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 tz}{z^3}\,dz$ διὰ $t>0$.

19. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὁλοκλήρωμα: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)d\theta$

20. Νὰ εὑρεθῆ τὸ μέγιστον τῆς $|f(z)|$ ἐπὶ τοῦ κύκλου $|z|\leq 1$ διὰ τὰς συναρτήσεις $f(z)$

αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπό τῶν τύπων:

i) z^2-3z+2 , ii) z^4+z^2+1 , iii) $ημ2z$, iv) $\frac{2z-3}{2z+3}$

21. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_c \frac{(e^z+z\sinh z)}{(z-\pi i)^3}\,dz$, ὅπου c εἶναι μία ἁπλῆ κλειστή καμπύλη ἔχουσα $z_0=\pi i$ εἰς τό ἐσωτερικόν της καί τό ὁλοκλήρωμα κατά μῆκος τῆς c λαμβάνεται κατά τήν θετικήν φοράν.

22. Ἔστω c μία ἁπλῆ κλειστή καμπύλη περικλείουσα τήν ἀρχήν. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{az}}{z^{n+1}}\,dz$$

23. Ἔστω $f(z)$ μία ἀναλυτική συνάρτησις ἐντός καί ἐπί τοῦ κύκλου $\Gamma: z=R\cdot e^{i\theta}$ καί $z_0=r_0\,e^{i\theta_0}$ ἐσωτερικόν σημεῖον τοῦ Γ, δείξατε ὅτι:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\,συν(\theta-\theta_0)}\,f\,(Re^{i\theta})\,d\theta$$

<u>Σημ.</u> Ὁ τελευταῖος τύπος εἶναι γνωστός ὡς <u>ὁλοκληρωτικός τύπος τοῦ Poisson</u>.

24. Να ὑπολογισθοῦν τα ὁλοκληρώματα:

α) $\int_c z\cdot \mathrm{Re}z\,dz$, ὅπου $c: |z|=1$ δηλ. περιφέρεια ἀκτῖνος $R=1$ διαγραφομένη κατά τήν θετικήν φοράν.

β) $\int_c \frac{z\cdot \mathrm{Re}z\,dz}{z-\frac{1}{2}}$, ὅπου $c: |z|=1$, διαγραφομένη κατά την θετικήν φοράν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΕΙΡΑΙ TAYLOR ΚΑΙ LAURENT

§ 1. ΣΕΙΡΑΙ TAYLOR

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Taylor, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σημαντικώτερα τῆς θεωρίας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων.

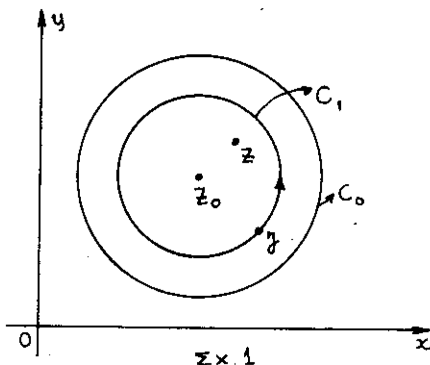
Θεώρημα VII – 1-1. Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ παντοῦ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κύκλου C_0 μὲ κέντρον τὸ σημεῖον z_0 καὶ ἀκτῖνα r_0. Τότε διὰ κάθε σημεῖον z ἐντὸς τοῦ C_0 θὰ ἔχωμεν:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)\cdot(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\cdots \qquad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) ἐκφράζει ὅτι ἡ δυναμοσειρὰ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ συγκλίνει πρὸς τὴν συνάρτησιν $f(z)$, ὅταν $|z-z_0|<r_0$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα σημαίνει ὅτι ἡ $f(z)$ ἀναπτύσσεται εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Taylor πέριξ τοῦ σημείου z_0. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ὅπου πάντες οἱ ὅροι τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἔχομεν τὴν ἀντίστοιχον κατὰ Taylor ἀνάπτυξιν εἰς δυναμοσειρὰν μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ἕνα z ἐντὸς τοῦ κύκλου C_0 καὶ ἄς θέσωμεν $|z-z_0|=r$, ὅπου $r<r_0$ (βλ. Σχ. 1). Ἔστω ζ ἕνα σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας C_1 ἑνὸς κύκλου κέντρου z_0 καὶ ἀκτῖνος r_1, τοιαύτης, ὥστε: $r<r_1<r_0$. Οὕτω $|\zeta-z_0|=r_1$. Ἐπειδὴ τὸ z κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου C_1 καὶ ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τοῦ κύκλου, ἕπεται, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy, ὅτι θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 1

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

ὅπου ὁ κύκλος C_1 θεωρεῖται διαγραφόμενος κατὰ τὴν δεξιὰν φοράν.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

Ἐπίσης, ἐὰν w εἶναι ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\neq 1$, ὡς γνωστὸν ἔχομεν:

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{N-1} + \frac{w^N}{1-w} \cdot$$

Ὅθεν,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{N-1} + \frac{1}{1 - \frac{(z - z_0)}{\zeta - z_0}} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^N \right]$$

καὶ κατὰ συνέπειαν:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} (z - z_0) + \cdots \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^N} (z - z_0)^{N-1} + (z - z_0)^N \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^N} \qquad (2)$$

Ὁλοκληροῦντες ἕκαστον ὅρον τῆς τελευταίας ἰσότητος κατὰ μῆκος τῆς περιφερείας C_1 καὶ διαιροῦντες διὰ $2\pi i$ καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

θὰ ἔχωμεν:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} (z - z_0)^{N-1} + R_N(z) \qquad (3)$$

ὅπου $$R_N(z) = \frac{(z - z_0)^N}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^N} \qquad (4)$$

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι: $|z - z_0| = r$ καὶ $|\zeta - z_0| = r_1$, ὅτε θὰ εἶναι:

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = r_1 - r.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ἀπὸ τὸν τύπον (4), ἐὰν M παριστᾷ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς $f(\zeta)$ ἐπὶ τῆς περιφερείας C_1, ὅτι:

$$|R_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi r_1}{(r_1 - r) r_1^N} = \frac{M r_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1}\right)^N \qquad (5)$$

Ἀλλὰ $r/r_1 < 1$, ὅθεν: $\lim\limits_{N \to \infty} R_N(z) = 0$

Οὕτω, διὰ κάθε σημεῖον z ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου C_0, τὸ ὅριον, καθὼς τὸ $N \uparrow \infty$, τοῦ ἀθροίσματος τῶν N πρώτων ὅρων τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἰσότητος (3)

τείνει πρός τήν συνάρτησιν $f(z)$. Συνεπῶς δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$f(z)=f(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n,\ \text{ὅταν } |z-z_0|<r_0 \qquad (6)$$

Διά $z_0=0$ ἡ ἀνωτέρω σειρά ἀνάγεται εἰς σειράν τοῦ Maclaurin, ἤτοι:

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot z^n,\ \text{ὅταν } |z|<r_0 \qquad (7)$$

Παρατήρησις: Ἐάν εἶναι γνωστόν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς πάντα τά σημεῖα τά κείμενα ἐντός ἑνός κύκλου κέντρου z_0, ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς τοῦ Taylor πέριξ τοῦ σημείου z_0 πρός τήν $f(z)$ διά κάθε z ἐντός τοῦ θεωρηθέντος κύκλου εἶναι ἐξησφαλισμένη καί οὕτω δέν ἀπαιτεῖται κριτήριον διά νά διαπιστώσωμεν τήν σύγκλισιν τῆς σειρᾶς.

Κατωτέρω δίδομεν μερικά παραδείγματα ἀναπτύξεως μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εἰς μίαν σειράν τοῦ Maclaurin ἤ Taylor.

i) Ἔστω $f(z)=e^z$. Αὕτη εἶναι ἀναλυτική διά κάθε $z\in\mathbb{C}$. Εἶναι δέ $f^{(n)}(z)=e^z$ καί $f^{(n)}(0)=1$. Ὅθεν,

$$e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ \text{ὅταν } |z|<+\infty.$$

Κατά ἕναν ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν:

ii) $$\text{ημ}z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad \text{ὅταν } |z|<+\infty$$

iii) $$\text{συν}z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \text{ὅταν } |z|<+\infty$$

iv) $$\sinh z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad \text{ὅταν } |z|<+\infty$$

v) $$\cosh z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \text{ὅταν } |z|<+\infty$$

vi) $$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad \text{ὅταν } |z|<1$$

vii) $$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{2n},\quad \text{ὅταν } |z|<1.$$

viii). $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n (z-1)^n$, ὅταν $|z-1| < 1$.

Ἀπόδ: (viii) Ἔστω $f(z) = z^{-1}$ εἶναι $f^{(n)}(z) = (-1)^n n! \cdot z^{-n-1}$ καί $f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$. Ἀναπτύσσοντες κατά Taylor τήν ἀνωτέρω συνάρτησιν πέριξ τοῦ σημείου $z=1$ ἔχομεν τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα.

ix) $\log z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(z-1)^n}{n} - \dots$ διά $|z-1| < 1$.

ἤ θέτοντες ἀντί z τό $z+1$ ἔχομεν:

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} - \dots \quad \text{διά } |z|<1.$$

x) Διά κάθε μιγαδικόν ἀριθμόν a, ὡς γνωστόν, ἔχομεν $z^a = e^{a \cdot \log z}$. Ὅθεν

$$z^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} (z-1)^n, \quad \text{διά } |z-1|<1$$

ἤ θέτοντες ἀντί z τό $z+1$ ἔχομεν:

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} z^n, \quad \text{διά } |z|<1.$$

xi) Διά κάθε $z \in \mathbb{C}$ μέ $|z-2| < 2$ ἰσχύει:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n.$$

Λύσις: Ἔστω $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Τότε:

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{z^{n+2}}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Ὅθεν:

$$f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{2^{n+2}}, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Ἐφ' ὅσον ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική διά ὅλα τά z μέ $|z-2|<2$, ἔχομεν:

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{2^{n+2}\, n!} (z-2)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n,$$

δηλ. ἡ δυναμοσειρά συγκλίνει πρός τήν συνάρτησιν $f(z) = \frac{1}{z^2}$, ὅταν $|z-2| < 2$.

§ 2. ΣΕΙΡΑΙ ΤΟΥ LAURENT

Ἤδη θά μελετήσωμεν σειράς, τῶν ὁποίων ἔχομεν ἀρνητικάς δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς z.

Θεώρημα VII-2-1. Ἔστω ἡ σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ (1) καί ἔστω ὅτι $\ell = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$, τότε θά ἔχωμεν:

i) Ἐάν $\ell = 0$, τότε ἡ σειρά (1) συγκλίνει ἀπολύτως διά πάντα τά z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τοῦ σημείου $z=a$.

ii) Ἐάν $0<\ell<\infty$, τότε ἡ σειρά (1) συγκλίνει ἀπολύτως διά πάντα τά z τά κείμενα ἐκτός τοῦ κύκλου $|z-a|=\ell$ καί ἀποκλίνει διά πάντα τά z τά κείμενα ἐντός τοῦ κύκλου $|z-a|=\ell$.

iii) Ἐάν $\ell=\infty$, ἡ σειρά (1) ἀποκλίνει διά πᾶν $z\ (\neq \infty)$.

Ἀπόδειξις: Ἄς θέσωμεν: $\zeta = \frac{1}{z-a}$, ὅτε ἡ σειρά (1) γίνεται: $\sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ (1′)

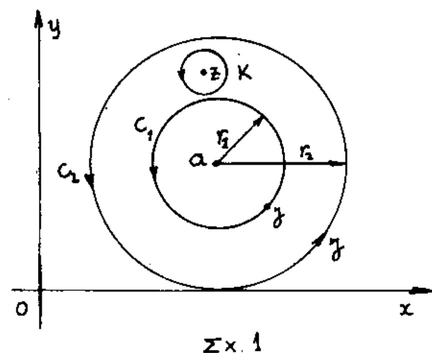
Ἡ ἀκτίς συγκλίσεως τῆς (1′), ὡς γνωστόν, εἶναι:

$$R' = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}} = \frac{1}{\ell} \quad (2)$$ [1]

Συνεπῶς ἡ (1) θά συγκλίνῃ διά αὐτά τά z πού ἔχομεν: $\frac{1}{|z-a|} = |\zeta| < \frac{1}{\ell}$ ἤ $|z-a|>\ell$, ἐξ οὗ τό συμπέρασμα.

• Ἔστωσαν C_1 καί C_2 δύο ὁμόκεντροι κύκλοι μέ κέντρον τό σημεῖον a καί ἀκτῖνας r_1 καί r_2 ἀντιστοίχως, ὅπου $0<r_1<r_2$ (βλ. Σχ. 1) Ἤδη θά μελετήσωμεν μίαν συνάρτησιν $f(z)$, ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική εἰς τόν κυκλικόν δακτύλιον $D: r_1<|z-a|<r_2$.

Ἕνας τοιοῦτος δακτύλιος εἶναι ἕνα χωρίον οὐχί ἁπλῶς συνεκτικόν καί κατά συνέπειαν δέν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Cauchy. Ἰσχύει σχετικῶς τό κάτωθι θεώρημα τοῦ Laurent.



Σχ. 1

1) Με $\frac{1}{\ell}$ συμβολίζομεν ἐπίσης τό 0 διά $\ell=+\infty$ καί τό $+\infty$ διά $\ell=0$

Θεώρημα VII - 2-2. Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου D, τότε διά κάθε σημεῖον z αὐτοῦ τοῦ δακτυλίου ἡ $f(z)$ ἔχει τό κάτωθι ἀνάπτυγμα:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (1)$$

ὅπου

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad (2)\ ,\ n=0,1,2,3,\ldots$$

καί

$$C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \qquad (3)$$

ἡ δέ φορά διαγραφῆς τῶν C_1 καί C_2 εἶναι ἡ ὁριζθεῖσα ὡς θετική.

Ἡ σειρά (1) δύναται νά γραφῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (4) \qquad (r_1<|z-a|<r_2).$$

ὅπου

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \ ,\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

καί ὡς C λαμβάνεται ἡ C_2 ἤ C_1 ἐάν τό n εἶναι θετικό ἤ ἀρνητικό ἀντιστοίχως.

Ἡ σειρά (4) ἡ ὁποία ἐγκλείει θετικάς καί ἀρνητικάς δυνάμεις τοῦ $(z-a)$ καλεῖται ***σειρά τοῦ Laurent*** καί θά εἶναι συγκλίνουσα, ἐάν ἀμφότεραι αἱ σειραί $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ καί $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ συγκλίνουν.

Ἐξ αὐτῶν δέ ἡ πρώτη καλεῖται ***κανονικόν μέρος*** τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent, ἐνῶ ἡ δευτέρα καλεῖται ***πρωτεῦον μέρος*** τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent.

Παρατήρησις: Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς κάθε σημεῖον κείμενον ἐντός τῆς C_2 καί ἐπ' αὐτῆς ἐξαιρουμένου τοῦ σημείου $z=a$, τότε ἡ ἀκτίς r_1 δύναται νά ληφθῆ ὁσονδήποτε μικρή καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ἔκφρασις (1) ἰσχύει διά $0<|z-a|<r_2$.

Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς πάντα τά σημεῖα τά κείμενα ἐντός καί ἐπί τῆς C_2, τότε ἡ συνάρτησις $f(z)\cdot(z-a)^{n-1}$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός καί ἐπί τῆς C_1 ἐπειδή $n\geq 1$ καί ὡς ἐκ τούτου τά ὁλοκληρώματα (3) τά δίδοντα τούς C_{-n} εἶναι πάντα μηδέν. Οὕτω ἡ ἔκφρασις (1) ἀνάγεται εἰς μίαν σειράν τοῦ Taylor.

<u>Ἀπόδειξις</u> (τοῦ θεωρήματος). Ἐάν z εἶναι ἕνα σημεῖον κείμενον ἐντός τοῦ κυκλικοῦ δακτυλίου D, θεωροῦμεν πέριξ αὐτοῦ ἕναν κύκλον K κείμενον ἐντός τοῦ δακτυλίου D καί θετικῶς προσανατολισμένον (βλ. Σχ. 1). Ἐπειδή ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό κυκλικόν χωρίον, τοῦ ὁποίου τό ἐσωτερικόν του εἶναι ἕνα πολλαπλῶς συνεκτικόν πεδίον, τότε συμφώνως πρός τό θεώρημα VI-2-2, θά ἔχωμεν.

$$\int_{C_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_{C_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_{K} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0 \qquad (1)$$

Συμφώνως πρός τόν τύπον τοῦ Cauchy ἡ τιμή τοῦ τρίτου ὁλοκληρώματος εἶναι $2\pi i f(z)$. Ὅθεν, ἡ (1) γράφεται:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (2)$$

Διά τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα (βλ. ἀπόδειξιν θεωρήματος VII-1-1) θά ἔχωμεν:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2}(z-a) + \cdots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n} \cdot (z-a)^{n-1} + (z-a)^n \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - a)^n}$$

Διά δέ τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα παρατηροῦμεν ὅτι:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-(\zeta-a)/(z-a)}$$

Καί οὕτω ἐπιτυγχάνομεν:

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(\zeta) \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-1}} \cdot \frac{1}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} \cdot \frac{1}{(z-a)^n} + \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{(\zeta-a)^n \cdot f(\zeta)}{z-\zeta}$$

Οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἕπεται ὅτι:

$$f(z) = c_1 + c_2(z-a) + \cdots + c_{n-1}(z-a)^{n-1} + R_n(z) + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + Q_n(z), \text{ ὅπου}$$

Τά $R_n(z)$ καί $\varphi_n(z)$ παρέχονται ὑπό τῶν τύπων:

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \cdot \int_{C_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)\cdot(\zeta - a)^n}$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i (z-a)^n} \int_{C_1} \frac{(\zeta-a)^n \cdot f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}$$

Ἔστω $r = |z-a|$, ὅπου $r_1 < r < r_2$. Ἐάν M εἶναι τό μέγιστον τῆς $|f(\zeta)|$ ἐπί τῆς

περιφερείας C_2, τότε ώς γνωστόν θά έχωμεν:

$$|R_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi r_1}{(r_2 - r) r_1^N} = \frac{M \cdot r_1}{r_2 - r} \cdot \left(\frac{r}{r_2}\right)^N$$

ἀλλά $\frac{r}{r_2} < 1$ καί ὡς ἐκ τούτου:

$$\lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν:

$$|Q_N(z)| \leq \frac{M \cdot r_1}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^N$$

εἶναι δέ $\frac{r_1}{r} < 1$ καί ὡς ἐκ τούτου

$$\lim_{N\to\infty} Q_N(z) = 0$$

Οὕτω ἐδείχθη τό θεώρημα τοῦ Laurent.

• Παραδείγματα 1ον/ Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ ἔχει τό κάτωθι κατά Laurent ἀνάπτυγμα:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

ὅπου τό z εὑρίσκεται ἐντός τοῦ δακτυλίου $0 < |z| < 1$.

Ὁμοίως ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ἔχει τό κάτωθι κατά Laurent ἀνάπτυγμα:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{1+(z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n,$$

ὅπου τό z εὑρίσκεται ἐντός τοῦ δακτυλίου $0 < |z-1| < 1$.

• 2ον/ Ἡ συνάρτησις $f(z) = e^{1/z}$ ἔχει τό κάτωθι κατά Laurent ἀνάπτυγμα:

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n}$$

ὅπου εἶναι $|z| > 0$.

3ον/ Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική παντοῦ ἐκτός τῶν δύο σημείων $z=1$ καί $z=2$. Ζητεῖται νά ἀναπτυχθῆ αὕτη εἰς σειράν Laurent εἰς τάς κάτωθι περιπτώσεις: i) Ὅταν $|z| < 1$, ii) Ὅταν $1 < |z| < 2$, iii) Ὅταν $|z| > 2$.

Λύσις: i) Θεωροῦμεν τά z τά εὑρισκόμενα ἐντός τοῦ δακτυλίου $|z| < 1$. Ἐξ

αὐτοῦ δὲ ἕπεται ὅτι $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$.

Θὰ ἔχωμεν ὅθεν:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n-z^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1}-1\right)z^n$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ἀναπτύσσεται εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Taylor διὰ κάθε z εὑρισκόμενον ἐντὸς τοῦ δίσκου $|z| < 1$. Τέλος εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι: $f^{(n)}(0)=n!\,(2^{-n-1}-1)$.

ii) Ἔστω ὅτι τὸ z εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ δακτυλίου $1<|z|<2$. Ἐντὸς αὐτοῦ τοῦ δακτυλίου θὰ ἔχωμεν: $|1/z|<1$ καὶ $|z/2|<1$.

Ὅθεν, $$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι διὰ τὰ z τὰ εὑρισκόμενα ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρω δακτυλίου ἡ $f(z)$ ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν τοῦ Laurent.

iii) Ἔστω ὅτι τὰ z εὑρίσκονται εἰς τὸ πεδίον $|z|>2$.

Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι: $|1/z|<1$ καὶ $|2/z|<1$.

Ὅθεν, $$f(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^{n+1}}.$$

Ἤτοι, ἡ $f(z)$ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν τοῦ Laurent.

§3. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΙΣ ΤΩΝ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΙΔΙΑΖΟΝΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΙΑΣ ΜΟΝΟΤΙΜΟΥ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἔστω τὸ σημεῖον a $(a \neq \infty)$ καὶ ἡ μονότιμος ἀναλυτικὴ συνάρτησις $f(z)$ ὡρισμένη εἰς κάθε σημεῖον κάποιας περιοχῆς τοῦ a ἐκτὸς τοῦ σημείου a. Ὡς γνωστὸν τὸ a τὸ καλοῦμεν ***μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον τῆς*** $f(z)$. Προτιθέμεθα νὰ μελετήσωμεν τὴν συμπεριφορὰν τῆς $f(z)$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=a$.

Συμφώνως πρὸς τὸ Θεώρημα VII - 2-2 ἡ $f(z)$ ἔχει τὸ κάτωθι κατὰ Laurent ἀνάπτυγμα:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-a)^n \qquad (1)$$

Συμφώνως πρὸς τὸ ἀνάπτυγμα (1) τρεῖς διαφορετικαὶ περιπτώσεις εἶναι δυναταί.

1ον/ Ἡ σειρά (1) νά μή περιέχῃ ἀρνητικάς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$.

2ον/ Ἡ σειρά (1) περιέχει ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν ὅρων μέ ἀρνητικάς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$.

3ον/ Ἡ σειρά (1) περιέχει ἀπείρους ἀρνητικάς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$.

Ἤδη θά μελετήσωμεν χωριστά ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω τριῶν περιπτώσεων.

1ον/. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν θά ἔχωμεν τό ἀκόλουθον ἀνάπτυγμα: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$. Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τοῦ $z \to a$, ἡ $f(z)$ ἔχει μίαν ὁριακήν τιμήν καί ἡ ὁποία ἰσοῦται πρός C_0. Ἐάν ἡ $f(z)$ δέν ἔχῃ ὁρισθῆ εἰς τήν θέσιν $z=a$, τότε ὁρίζομεν ταύτην εἰς τό ἀνωτέρω σημεῖον θέτοντες $f(a)=C_0$. Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ ἀρχικῶς ἀποδοθεῖσα τιμή τῆς $f(z)$ διά $z=a$ δέν εἶναι ἴση πρός C_0, τότε ὁρίζομεν ἐκ νέου τήν τιμήν τῆς $f(z)$ διά $z=a$ θέτοντες $f(z)=C_0$. Οὕτω ἡ $f(z)$ θά εἶναι ἀναλυτική παντοῦ ἐντός τοῦ κύκλου $|z-a|<r_2$. Συνεπῶς ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν <u>ἄρσιν</u> (διόρθωσιν) <u>τῆς ἀνωμαλίας</u> τῆς $f(z)$ εἰς τό σημεῖον $z=a$. Ὅθεν, εἰς ἕνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον $z=a$ τῆς $f(z)$ εἰς τό ὁποῖον τό ἀνάπτυγμα τῆς $f(z)$ εἰς μίαν σειράν τοῦ Laurent δέν περιέχει ἀρνητικάς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$, δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν ἄρσιν τῆς ἀνωμαλίας.

<u>**Παράδειγμα**</u>: Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{z-\eta\mu z}{z^3}$, ἡ ὁποία ἔχει τό σημεῖον $z=0$ ἰδιάζον. Νά ἀναπτυχθῆ εἰς σειράν τοῦ Laurent καί νά εὑρεθῆ ὁ δακτύλιος συγκλίσεως ταύτης.

<u>**Λύσις**</u>: Ἔχομεν:
$$\frac{z-\eta\mu z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left\{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}-\cdots\right\}=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\cdots$$

Εἰς τό σημεῖον $z=0$ ἐπιτυγχάνομεν ἄρσιν τῆς ἀνωμαλίας θέτοντες: $f(0)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$.

Ἡ ἀνωτέρω σειρά συγκλίνει προφανῶς διά κάθε $z\in\mathbb{C}$.

2ον/. Ἡ σειρά τοῦ Laurent τῆς συναρτήσεως $f(z)$ πέριξ τοῦ μεμονωμένου ἰδιάζοντος σημείου $z=a$ περιέχει ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν m ὅρων ἐχόντων ἀρνητικάς δυνάμεις τοῦ $(z-a)$, μέ ἄλλους λόγους ἡ σειρά (1) εἶναι τῆς μορφῆς:
$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z-a)^n.$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ σημεῖον $z=a$ εἶναι ἕνας πόλος τάξεως m τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

Πράγματι ἔχομεν ἐν προυειμένω:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} \qquad (2),$$

ὅπου $C_{-m} \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ $(z-a)^m$ λαμβάνομεν:

$$(z-a)^m \cdot f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^{n+m} + C_{-1}(z-a)^{m-1} + C_{-2} \cdot (z-a)^{m-2} + \cdots + C_{-m}, \quad (3)$$

ὅπου τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (3) εἶναι μία συνήθης δυναμοσειρὰ καὶ τῆς ὁποίας ὁ σταθερὸς ὅρος εἶναι ὁ C_{-m} ($\neq 0$). Συνεπῶς εἰς τὸ σημεῖον $z=a$ αἴρεται ἡ ἀνωμαλία τῆς συναρτήσεως $(z-a)^m \cdot f(z)$. Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν:

$$\lim_{z\to a} (z-a)^m f(z) = C_{-m} \neq 0.$$

καὶ κατὰ συνέπειαν:

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} = \infty$$

Συνεπῶς τὸ $z=a$ εἶναι πόλος τῆς συναρτήσεως $f(z)$ τάξεως m.

• **Παράδειγμα**: Νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ Laurent ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ περὶξ τοῦ ἰδιάζοντος σημείου $z=1$ αὐτῆς. Ἐξετάσατε τὸ εἶδος τοῦ σημείου τούτου.

Λύσις: Θέτομεν $z-1=u$, ὅτε $z=1+u$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν:

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3}\cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3}\cdot\left\{1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\frac{(2u)^4}{4!}+\cdots\right\} =$$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \cdots$$

Οὕτω τὸ σημεῖον $z=1$ εἶναι ἕνας πόλος τάξεως $m=3$.

3ον/. Ἡ σειρὰ τῶν Laurent τῆς συναρτήσεως $f(z)$ περὶξ τοῦ μεμονωμένου ἰδιάζοντος σημείου $z=a$ ἐγκλείει ἕναν ἄπειρον ἀριθμὸν ἀρνητικῶν δυνάμεων τῆς διαφορᾶς $(z-a)$, δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον $z=a$ εἶναι ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

Παράδειγμα 1ον. Ἡ συνάρτησις $f(z)=e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots$ ἔχει τό σημεῖον $z=0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον.

2ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=(z-3)\,\eta\mu\frac{1}{z+2}$. Νά εὑρεθῆ ἡ σειρά τοῦ Laurent ταύτης πέριξ τοῦ ἰδιάζοντος σημείου $z=-2$.

Λύσις: Ἔστω $z+2=u$, ὅτε $z=u-2$. Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται:

$$(z-3)\,\eta\mu\frac{1}{z+2}=(u-5)\,\eta\mu\frac{1}{u}=(u-5)\cdot\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{3!\,u^3}+\frac{1}{5!\,u^5}+\cdots\right\}=$$

$$=1-\frac{5}{u}-\frac{1}{3!\,u^2}+\frac{5}{3!\,u^3}+\frac{1}{5!\cdot u^4}-\cdots$$

$$=1-\frac{5}{z+2}-\frac{1}{6\,(z+2)^2}+\frac{5}{6(z+2)^3}+\frac{1}{120\,(z+2)^4}+\cdots$$

Οὕτω τό σημεῖον $z=-2$ εἶναι ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς συναρτήσεως. Ἡ ἀνωτέρω σειρά συγκλίνει διά κάθε $z\neq-2$.

§4. ΟΜΑΛΗ ΣΥΓΚΛΗΣΙΣ ΣΕΙΡΩΝ

Ἤδη θά μελετήσωμεν τάς συναρτησιακάς σειράς, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς.

Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν μονοτίμων μιγαδικῶν συναρτήσεων $\{f_n(z)\}$, $n\geq1$ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z ὡρισμένων εἰς ἕνα πεδίον G καί ἐξ αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας ἄς σχηματίσωμεν τήν σειράν τῶν συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ (1). Διά κάθε σταθεράν $z_0\in G$ ἡ σειρά (1) μετατρέπεται εἰς μίαν σειράν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἡ σειρά (1) θά λέγωμεν ὅτι συγκλίνει ἐν G, ἐάν διά κάθε $z\in G$ ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητική σειρά συγκλίνῃ.

Ἐάν ἡ σειρά (1) συγκλίνῃ ἐν G, τότε εἰς αὐτό τό πεδίον G δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν μίαν μονότιμον συνάρτησιν $S(z)$, τῆς ὁποίας ἡ τιμή διά κάθε $z\in G$ ἰσοῦται πρός τόν ἀριθμόν πρός τόν ὁποῖον συγκλίνει ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητική σειρά. Αὐτή ἡ συνάρτησις $S(z)$ καλεῖται *ἄθροισμα* τῆς σειρᾶς (1) ἐντός τοῦ πεδίου G.

Οὕτω, συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω, διά κάθε $z\in G$ καί διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἕνας θετικός ἀκέραιος $N(z,\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\left|S(z)-\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right|<\varepsilon \quad (2) \quad \delta\iota\acute{\alpha} \quad n\geq N(\varepsilon,z) \qquad \ddot{\eta}$$

$$|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon \quad (2') \quad \delta\iota\acute{\alpha} \quad n\geq N(\varepsilon,z),$$

ὅπου $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$, δηλ. τό ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι ὁ ἀριθμός N ἐξαρτᾶται οὐχί μόνον ἐκ τοῦ ε, ἀλλά καί ἐκ τοῦ σημείου z. Ὅπως διά τάς πραγματικάς συναρτήσεις, οὕτω καί διά τάς μιγαδικάς, εἶναι ἀπαραίτητον νά εἰσαγάγωμεν τήν ἔννοιαν τῆς ὁμαλῆς συγκλίσεως καί νά ἀναφέρωμεν ἐν συντομία τά βασικά θεωρήματα τά ἀφορῶντα ταύτην. Ἡ ἔννοια αὕτη παίζει ἕναν σημαντικόν ρόλον εἰς τήν θεωρίαν τῶν σειρῶν τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων.

<u>Ὁρισμός VII-4-1.</u> *Ἔστω ὅτι* $S_n(z)$ ***εἶναι τό ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς*** (1), ***ἡ ὁποία συγκλίνει πρός τήν συνάρτησιν*** $S(z)$ (ἄθροισμα) ***διά κάθε*** $z \in G$. ***Θά λέγωμεν ὅτι ἡ σειρά*** (1) ***συγκλίνει ὁμαλῶς ἐν*** G, ***ἐάν διά κάθε*** $\varepsilon > 0$ ***ὑπάρχη ἕνας θετικός ἀκέραιος*** $N = N(\varepsilon) > 0$ (ἀνεξάρτητος τοῦ z) ***τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν:*** $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ (3) ***διά*** $n \geq N(\varepsilon)$ ***καί διά κάθε*** $z \in G$.

Θέτοντες $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ ἡ συνθήκη (3) τῆς ὁμαλῆς συγκλίσεως ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά ἔχωμεν: $|R_n(z)| < \varepsilon$ (3') διά $n \geq N(\varepsilon)$.

Παραθέτομεν κατωτέρω μερικά βασικά θεώρηματα ὁμαλῆς συγκλίσεως.

<u>Θεώρημα VII-4-1.</u> <u>Ἐάν ἡ σειρά</u> $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ <u>συγκλίνη ὁμαλῶς ἐν G καί ἐάν ἕκαστος ὅρος ταύτης εἶναι συνεχής συνάρτησις εἰς τό σημεῖον</u> $z_0 \in G$, <u>τότε καί τό ἄθροισμα S(z) τῆς σειρᾶς εἶναι ἐπίσης συνεχής συνάρτησις εἰς τό σημεῖον</u> z_0.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρός τήν ἐκτεθεῖσαν εἰς τόν Πρῶτον Τόμον Πόρισμα XVIII-3-1 διά πραγματικάς συναρτήσεις.

Μία ἄμεσως συνέπεια τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἶναι, <u>ὅτι τό ἄθροισμα μιᾶς ὁμαλῶς συγκλινούσης σειρᾶς συνεχῶν συναρτήσεων ἐντός τοῦ G εἶναι ὁμοίως συνεχής συνάρτησις ἐντός τοῦ G.</u> (Ἐπειδή συνέχεια ἐντός τοῦ G σημαίνει συνέχεια εἰς κάθε σημεῖον τοῦ G).

<u>Θεώρημα VII-4-2.</u> (Κριτήριον Weierstrass). <u>Ὑποθέτομεν ὅτι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς</u> $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ <u>ἱκανοποιοῦν τήν ἀνισότητα</u> $|f_k(z)| \leq a_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ <u>διά κάθε</u> $z \in G$ <u>καί ὅτι ἡ ἀριθμητική σειρά</u> $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ <u>συγκλίνει. Τότε ἡ δοθεῖσα σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ G.</u>

'Απόδειξις: 'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν:

$$|f_k(z)| \leq a_k \text{ διά } z \in G.$$

'Επειδή ἡ σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει ἐξ ὑποθέσεως, ἕπεται ὅτι διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕνας θετικός ἀκέραιος $N > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ διά $n \geq N$.

'Εξ ἄλλου ἔχομεν τήν ἀνισότητα:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \text{ διά } n \geq N$$

Τό τελευταῖον συμπέρασμα ἀποδεικνύει τό θεώρημα.

'Εφαρμογή: θεωροῦμεν τήν σειράν: $z + (z^2 - z) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) + \cdots$.

Τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς τό $S_n(z) = z^n$. Προφανῶς ἡ ἀκολουθία $\{z^n\}$, $n \geq 1$, συνεπῶς καί ἡ σειρά, συγκλίνουν ἐντός τοῦ δίσκου $|z| < 1$ καί ἐξαιρετικῶς καί εἰς τό σημεῖον $z = 1$ καί ἀποκλίνει διά $|z| \geq 1$ ἐκτός τοῦ σημείου $z = 1$, ὅπου συγκλίνει. Τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς θά εἶναι:

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} z^n = \begin{cases} 0, & \text{ἐάν } |z| < 1 \\ 1, & \text{»} \quad z = 1 \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις $f(z)$ δέν εἶναι συνεχής εἰς τό σύνολον $G = \{z : |z| < 1 \text{ καί } z = 1\}$.

Τήν ἀνωτέρω σειράν τήν γράφομεν οὕτω:

$$1 + (z-1) + (z^2 - z) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n - z^{n-1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \text{ ὅπου } f_n(z) = z^n - z^{n-1}.$$

Ἄς ἐξετάσωμεν τήν ὁμαλήν σύγκλισιν τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Ἔχομεν: $|f_n(z)| = |z^n - z^{n-1}| = |z^{n-1}| \cdot |z - 1|$ καί ἐντεῦθεν.

$$|f_n(z)| \leq r^{n-1} (r+1), \text{ ὅπου } |z| \leq r$$

Εἶναι ὅμως $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cdot (r+1) = (r+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$

Ἡ τελευταία ἀριθμητική σειρά συγκλίνει διά $\tau<1$.

Συμφώνως δέ πρός τό προηγούμενον θεώρημα καί ἡ δοθεῖσα σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς κάθε κλειστόν δίσκον $|z| \le \tau < 1$.

Θεώρημα VII-4-3. Ἐάν ἡ σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ (1) τῶν συνεχῶν συναρτήσεων $f_k(z)$ συγκλίνη ὁμαλῶς πρός τήν συνάρτησιν $S(z)$ ἐντός τοῦ πεδίου G, τότε τό ὁλοκλήρωμα αὐτῆς τῆς συναρτήσεως κατά μῆκος μιᾶς τμηματικῶς λείας καμπύλης C, κειμένης ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ G δύναται νά ὑπολογισθῆ ὁλοκληροῦντες ἕκαστον ὅρον τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς κατά μῆκος τῆς C, δηλ.

$$\int_C S(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)\,dz$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή ἡ σειρά (1) συγκλίνει ὁμαλῶς, τότε διά κάθε $z \in G$ ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός N τοιοῦτος, ὥστε διά κάθε $\varepsilon > 0$ νά ἔχωμεν:

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{L} \quad \text{διά } n \ge N(\varepsilon) \equiv N,$$

ὅπου L εἶναι τό μῆκος τῆς καμπύλης C. Τότε:

$$\left|\int_C S(z)dz - \sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(z)dz\right| = \left|\int_C \left\{S(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right\}dz\right| = \left|\int_C R_n(z)dz\right| \le \int_C |R_n(z)|dz \le L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Ὅθεν,
$$\int_C S(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)\,dz\,.$$

Θεώρημα VII-4-4. (Weierstrass). Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις $f_n(z)$ διά τάς ὁποίας ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι ἀναλυτικαί ἐντός τοῦ πεδίου G καί ἔστω ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ὁμαλῶς πρός τήν συνάρτησιν $S(z)$ εἰς κάθε κλειστόν ὑπό-πεδίον $\bar{G}'$ τοῦ G. Τότε ἰσχύουν τά κάτωθι:

1ον/ Ἡ $S(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ πεδίου G.

2ον/ $S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$

3ον/ Ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς κάθε κλειστόν ὑπό-πεδίον $\bar{G}'$ τοῦ G.

Ἀπόδειξις: 1ον. Ἔστω ἕνα τυχόν ἐσωτερικόν σημεῖον $z_0 \in G$ καί ἐν συνεχεία κατασκευάζομεν ἕνα ἁπλό συνεκτικόν ὑπό-πεδίον G' τοῦ G περιέχον τό σημεῖον z_0. Συμφώνως πρός τό θεώρημα VII-4-1, ἡ $S(z)$ εἶναι συνεχής συνάρτησις ἐντός τοῦ G. Θεωροῦμεν τό ὁλοκλήρωμα τῆς $S(z)$ κατά μῆκος μιᾶς αὐθαιρέτου κλειστῆς καμπύλης C κειμένης ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ πεδίου G'. Συμφώνως δέ πρός τό προηγούμενον θεώρημα, θά ἔχωμεν:

$$\int_C S(\zeta)\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(\zeta)\,d\zeta = 0 \qquad (1),$$

καθ' ὅτι, αἱ $f_n(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί ἐντός τοῦ G καί συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ Cauchy θά ἔχωμεν $\int_C f_n(\zeta)\,d\zeta = 0$. Συμφώνως δέ πρός τό θεώρημα VII-4-2 (Morera) ἡ $S(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς μίαν περιοχήν G' τοῦ σημείου z_0. Ἐπειδή ἡ ἐκλογή τοῦ σημείου z_0 εἶναι αὐθαίρετος, ἡ $S(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ G.

2ον. Ἔστω ἕνα αὐθαίρετον (σταθερόν) σημεῖον $z_0 \in G$. Ἐκλέγομεν μίαν αὐθαίρετον κλειστήν καμπύλην C κειμένην ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός ἑνός ὑπό-πεδίου G' καί περιέχουσα (ἡ C) τό σημεῖον z_0. Ἐπειδή,

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (2)$$

θά ἔχωμεν:

$$\frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \qquad (3)$$

Διά τήν σειράν (3) παρατηροῦμεν ὅτι, λόγω τῶν ὑποθέσεων τοῦ θεωρήματος, αὕτη συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπί τῆς C. Ὅθεν, ὁλοκληροῦντες κατά ὅρους τήν σειράν (3) κατά μῆκος τῆς C καί ἐν συνεχεία ἐφαρμόζοντες τόν ὁλοκληρωτικόν τύπον τοῦ Cauchy, λαμβάνομεν:

$$\int_C \frac{S(\zeta)\,dz}{(\zeta-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \qquad \text{ἤ}$$

$$S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0) \qquad (4)$$

Ἐπειδή δέ τό z_0 εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ G, τό δεύτερον μέρος τοῦ θεω-

ρήματος ἀπεδείχθη.

3ον. Ἤδη θά δείξωμεν ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς κάθε κλειστόν ὑπό-πεδίον $\bar{G}'$ τοῦ G. Ἔστω γ_{z_0} μία περιφέρεια ἀκτῖνος R καί κέντρου z_0 καί ἔστω K_{z_0} ὁ ἀνοικτός δίσκος κέντρου z_0 καί ἀκτῖνος 1/2 R. Ἐπειδή ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπί τῆς γ_{z_0}, ὑπάρχει ἕνας ἀκέραιος $N_{z_0} = N_{z_0}(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος ὥστε, νά ἔχωμεν:

$$|S_n(\zeta) - S(\zeta)| < \varepsilon \qquad (5)$$

δι' ὅλα τά $n \geq N_{z_0}$ καί ὅλα τά $\zeta \in \gamma_{z_0}$.

Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\left| \frac{k!}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_{z_0}} \frac{f_1(\zeta)dz}{(\zeta - z)^{k+1}} + \cdots + \frac{k!}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_{z_0}} \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{S(\zeta)dz}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| =$$

$$= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{S_n(\zeta) - S(\zeta)dz}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{|S_n(\zeta) - S(\zeta)|dz}{|\zeta - z|^{k+1}} \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{(R/2)^{k+1}} \cdot 2\pi R \qquad (6),$$

δι' ὅλα τά $n \geq N_{z_0}$ καί ὅλα τά $z \in K_{z_0}$

Ἐφαρμόζοντες δέ τόν τύπον τοῦ Cauchy τό ἀριστερόν μέλος (6) γίνεται:

$$\left| f_1^{(k)}(z) + \cdots + f_n^{(k)}(z) - S^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{R^k} \cdot \varepsilon \qquad (7)$$

διά $n \geq N_{z_0}$ καί $z \in K_{z_0}$.

Ἐκ τῆς (7) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγκλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ δίσκου K_{z_0}.

Συμφώνως δέ πρός τό θεώρημα τῆς καλύψεως τῶν Heine-Borel (βλ. θεώρημα I-1-2) τό κλειστόν καί φραγμένον χωρίον $\bar{G}'$ δύναται νά καλυφθῇ ὑπό ἑνός πεπερασμένου ἀριθμοῦ δίσκων K_{z_0} ($z_0 \in G$), ἔστω τῶν $K_{z_1}, K_{z_2}, \ldots, K_{z_n}$. Ἐκλέγομεν ἐν συνεχείᾳ ὡς $N = \max\{N_{z_1}, N_{z_2}, \ldots, N_{z_n}\}$ καί παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἀνισότης (7) θά ἰσχύῃ δι' ὅλα τά $n \geq N$ καί διά <u>κάθε</u> $z \in \bar{G}'$, δηλ. ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγκλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ $\bar{G}'$.

- Τά ἀνωτέρω θεωρήματα δυνάμεθα προφανῶς νά τά ἐφαρμόσωμεν καί εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν τῶν δυναμοσειρῶν. Σχετικῶς ἰσχύουν τ' ἀκόλουθα διά τήν δυναμοσειράν:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (1)$$

Θεώρημα VII-4-5. Ἐάν ἡ δυναμοσειρά (1) ἔχη ἀκτῖνα συγκλίσεως R, τότε ἡ (1) συγκλίνει ὁμαλῶς (καί ἀπολύτως) εἰς κάθε κλειστόν δίσκον $|z| \leq r < R$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή $|z| \leq r$ θά ἔχωμεν καί $|c_n z^n| = |c_n| \cdot |z|^n \leq |c_n| \cdot r^n$. Ἀλλά ἡ ἀριθμητική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot r^n$ συγκλίνει καί ὡς ἐκ τούτου κατά τό κριτήριον τοῦ Weierstrass καί ἡ δοθεῖσα σειρά θά συγκλίνῃ ὁμαλῶς καί ἀπολύτως ἐντός τοῦ χωρίου $|z| \leq r < R$.

Θεώρημα VII-4-6. Τό ἄθροισμα $S(z)$ τῆς δυναμοσειρᾶς (1) μέ ἀκτῖνα συγκλίσεως R εἶναι συνεχής συνάρτησις ἐντός τοῦ δίσκου $|z| < R$.

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καθώς καί τοῦ θεωρήματος VII-4-1 ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις $S(z)$ εἶναι συνεχής εἰς κάθε κλειστόν δίσκον $|z| \leq r < R$. Ἐντεῦθεν ἡ $S(z)$ εἶναι συνεχής εἰς τόν ἀνοικτόν δίσκον $|z| < R$.

Θεώρημα VII-4-7. Ἔστω ἡ δυναμοσειρά (1) μέ ἀκτῖνα συγκλίσεως R καί ἔστω $S(z)$ τό ἄθροισμα ταύτης, τότε:

i) Ἡ συνάρτησις $S(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ δίσκου $|z| < R$ καί ἐπιπλέον ἰσχύει:

$$S'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots + n c_n z^{n-1} + \cdots$$

δηλ. ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος τῆς δυναμοσειρᾶς εὑρίσκεται, ἐάν παραγωγίσωμεν ἕκαστον ὅρον τῆς δυναμοσειρᾶς καί ἡ νέα δυναμοσειρά ἔχει πάλιν ἀκτῖνα συγκλίσεως R.

ii) Τό ὁλοκλήρωμα τῆς $S(z)$ κατά μῆκος μιᾶς κλειστῆς καμπύλης C κειμένης ἐντός τοῦ δίσκου $|z| < R$ εὑρίσκεται, ἐάν ὁλοκληρώσωμεν ἕκαστον ὅρον τῆς δυναμοσειρᾶς κατά μῆκος τῆς ἰδίας καμπύλης.

§5. ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΣ

Κατ' ἀρχάς θά ἐξετάσωμεν πῶς ἡ συμπεριφορά μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα πεδίον προσδιορίζεται ἀπό τήν συμπεριφοράν αὐτῆς εἰς ἕνα μικρόν σύνολον περιεχόμενον εἰς αὐτό τό πεδίον. Μέ ἄλλους λόγους θά θεωρήσωμεν τό πρόβλημα τῆς ἐπεκτάσεως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως. Πρός τούτοις θεωροῦμεν ἀναγκαῖον νά ἀποδείξωμεν τό κάτωθι:

Θεώρημα VII-5-1. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα σημεῖον z_0, τό ὁποῖον εἶναι μηδενίζον αὐτῆς. Τότε ὑπάρχει μία περιοχή τοῦ z_0 ἐντός τῆς ὁποίας ἡ $f(z)$ δέν ἔχει ἄλλα μηδενίζοντα, ἐκτός ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Τό ἀνωτέρω συμπέρασμα σημαίνει ὅτι τά μηδενίζοντα σημεῖα τῆς $f(z)$ εἶναι μεμονωμένα σημεῖα.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό z_0 αὐτό σημαίνει ὅτι ὑπάρχει ἕνας κύκλος κέντρου z_0 καί ἀκτῖνος r_0 εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ ὁποίου ἡ $f(z)$ ἔχει τό κάτωθι κατά Taylor ἀνάπτυγμα.

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(z-z_0)^n,\quad \text{ὅπου } |z-z_0|<r_0 \qquad (1),$$

εἶναι δέ $a_0=f(z)$ καί $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Ἐάν τό z_0 εἶναι μηδενίζον τῆς $f(z)$, τότε $a_0=0$. Ἐάν δέ συμβῆ ἐπί πλέον καί εἶναι $f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$ ἐνῶ $f^{(m)}(z_0)\neq 0$, τότε ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$f(z)=(z-z_0)^m\sum_{n=0}^{\infty}a_{m+n}\,(z-z_0)^n,\quad a_m\neq 0 \qquad (2),$$

μέ ἄλλους λόγους εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν τό μηδενίζον τήν $f(z)$ εἶναι n-τάξεως.

Ἔστω $q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{m+n}\,(z-z_0)^n$, ὅπου $|z-z_0|<r_0$ (3)

Εἶναι δέ, $q(z_0)=a_m\neq 0$. Ἐπειδή ἡ (3) συγκλίνει, ἡ $q(z)$ εἶναι συνεχής εἰς τό z_0. Οὕτω διά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει ἕνα $\delta(\varepsilon)>0$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$|q(z)-a_m|<\varepsilon \text{ διά } |z-z_0|<\delta(\varepsilon) \qquad (4)$$

Ἐάν $\varepsilon=\frac{|a_m|}{2}$ καί δ_0 εἶναι μία ἀντίστοιχος τιμή τοῦ δ, τότε λόγῳ τῆς (4) θά ἔχωμεν:

$$|q(z)-a_m|<\frac{|a_m|}{2},\quad \text{ὅταν } |z-z_0|<\delta_0 \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (5) προκύπτει, ὅτι εἰς κάθε σημεῖον τῆς περιοχῆς $|z-z_0|<\delta_0$ εἶναι $q(z)\neq 0$ διότι, ἄν ὑπῆρχεν σημεῖον τοιοῦτον ὥστε $q(z)=0$, τότε θά εἴχομεν: $|a_m|<\frac{|a_m|}{2}$, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος συμπεραίνομεν ὅτι: i) Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα σημεῖον z_0, τότε ὑπάρχει μία περιοχή $|z-z_0|<\varepsilon$ τοιαύτη, ὥστε εἴτε ἡ $f(z)\equiv 0$ ἐντός αὐτῆς τῆς περιοχῆς, εἴτε ἡ $f(z)$ δέν ἔχει μηδενίζοντα σημεῖα ἐντός αὐτῆς τῆς περιοχῆς μέ πιθανήν ἐξαίρεσιν αὐτό τοῦτο τό σημεῖον z_0, τό ὁποῖον

δυνατόν νά εἶναι μηδενίζον σημεῖον τῆς $f(z)$.

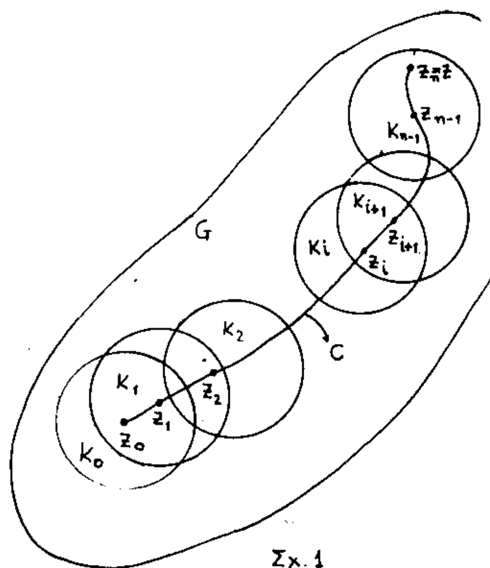
● Ὑποθέτομεν ἤδη ὅτι τό σημεῖον z_0 εἶναι ἕνα σημεῖον συσσωρεύσεως ἑνός ἀπειροσυνόλου καί ὅτι ἡ $f(z)=0$ εἰς κάθε σημεῖον z αὐτοῦ τοῦ συνόλου. Τότε κάθε περιοχή τοῦ z_0 περιέχει ἕνα μηδενίζον (κατά συνέπειαν καί ἄπειρα μηδενίζοντα) τήν $f(z)$ διάφορον τοῦ z_0 καί ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό z_0, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει κάποια περιοχή τοῦ z_0, ὅπου $f(z)\equiv 0$.

ii) Εἰδικῶς, ἐάν ἡ $f(z)=0$ εἰς κάθε σημεῖον z κάποιου πεδίου G' περιέχοντος τό z_0 ἤ εἰς κάθε σημεῖον κάποιου τόξου (γ) περιέχοντος τό z_0 καί ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τόν ἀνοικτόν δίσκον $|z-z_0|<r_0$, ὅστις περιέχει τό ἀνωτέρω πεδίον ἤ τόξον, τότε ἡ $f(z)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν εἰς αὐτόν τόν δίσκον $|z-z_0|<r_0$.

Ἤδη παραθέτομεν τό κάτωθι σπουδαῖον θεώρημα.

Θεώρημα VII-5-2. Ἐάν μία συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική παντοῦ εἰς ἕνα πεδίον G καί εἶναι $f(z)=0$ εἰς κάθε σημεῖον z ἑνός ὑπό-πεδίου G' ἤ ἑνός τόξου ἐσωτερικοῦ τοῦ G, τότε ἡ $f(z)=0$ εἰς κάθε σημεῖον τοῦ G.

Ἀπόδειξις: Θ' ἀποδείξωμεν τό θεώρημα εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $f(z)=0$ διά κάθε σημεῖον z ἑνός πεδίου G_0 ἐσωτερικοῦ τοῦ G. Ἔστω z_0 ἕνα σημεῖον τοῦ G_0 καί z ἕνα σημεῖον τοῦ G μή κείμενον ὅμως ἐντός τοῦ G_0. Ἐπειδή τό πεδίον G εἶναι συνεκτικόν, ὑπάρχει μία γραμμή C κειμένη ἐντός τοῦ G καί ἑνώνουσα τά σημεῖα z_0 καί z (βλ. Σχ. 1). Ἔστω ρ ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῆς C καί τοῦ συνόρου τοῦ G. Ἔστωσαν δέ ὅτι τά σημεῖα $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}, z_n \equiv z$ εἶναι διαδοχικά σημεῖα τῆς C τοιαῦτα, ὥστε:



Σχ. 1

$$|z_{i+1}-z_i|<\rho \quad (i=0,1,2,\ldots,n-1) \quad (1)$$

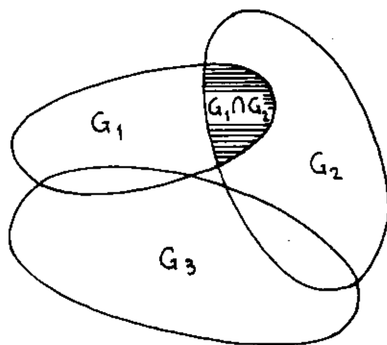
Ἡ ὕπαρξις τῶν σημείων τῶν ἱκανοποιούντων τήν (1) συνάγεται εὐκόλως ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν Heine-Borel (βλ. Θεώρημα I-1-2). Οὕτω κατασκευάζομεν τήν

"ἄλυσιν" τῶν ἀνοικτῶν δίσκων K_i, $0 \le i \le n-1$, ὅπου K_i εἶναι ὁ ἀνοικτός δίσκος $|z-z_i|<\rho$. Προφανῶς κάθε δίσκος K_i περιέχει τό κέντρον z_{i+1} τοῦ "ἑπομένου" δίσκου K_{i+1}. Εἰς ἕκαστον δίσκον K_i ἡ $f(z)$ ἔχει, ὡς γνωστόν, ἕνα κατά Taylor ἀνάπτυγμα.

Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως ἡ $f(z)=0$ εἰς κάθε σημεῖον τοῦ συνόλου $G_0 \cap K_0$, τό ὁποῖον ἔχει τό z_0 ὁριακόν σημεῖον, ἕπεται ὅτι κατά τά προηγούμενα συμπεράσματα ὅτι, αὕτη θά εἶναι μηδέν εἰς ὁλόκληρον τόν δίσκον K_0, τότε ὅμως θά εἶναι μηδέν εἰς κάθε σημεῖον τοῦ συνόλου $K_0 \cap K_1$ τό ὁποῖον ἔχει τό σημεῖον z_1 ὡς ὁριακόν σημεῖον καί κατά συνέπειαν θά εἶναι μηδέν ἐντός τοῦ δίσκου K_1. Συνεχίζοντες τόν συλλογισμόν μας θά καταλήξωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι μηδέν εἰς τόν K_{n-1} δίσκον καί ἐντεῦθεν εἶναι μηδέν εἰς τό σημεῖον $z_n \equiv z$. Οὕτω ἡ $f(z)$ εἶναι μηδέν εἰς ὁλόκληρον τό πεδίον G, καθ' ὅτι τό z ἐλήφθη αὐθαίρετον ἐντός τοῦ πεδίου G.

<u>**Πόρισμα VII-5-1**</u>. <u>Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καί $g(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί παντοῦ εἰς ἕνα πεδίον G καί αἱ $f(z)$ καί $g(z)$ ταυτίζονται εἰς κάθε σημεῖον z ἑνός ὑποπεδίου G' τοῦ G, τότε αἱ $f(z)$ καί $g(z)$ ταυτίζονται ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ πεδίου G.</u>

● Ὡς γνωστόν ἡ τομή $G_1 \cap G_2$ δύο πεδίων G_1 καί G_2 εἶναι ἕνα πεδίον. Ἐάν ἔχωμεν δύο πεδία G_1 καί G_2 μέ κοινά σημεῖα καί μίαν συνάρτησιν $f_1(z)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ G_1 ἐνδέχεται νά ὑπάρχη μία συνάρτησις $f_2(z)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ πεδίου G_2 (βλ. Σχ. 1) καί τοιαύτη ὥστε $f_2(z)=f_1(z)$ διά κάθε $z \in G_1 \cap G_2$. Ἐάν συμβαίνη αὐτό, καλοῦμεν τήν $f_2(z)$ ***ἀναλυτικήν ἐπέκτασιν*** τῆς $f_1(z)$ ἐντός τοῦ πεδίου G_2.



Σχ. 1

Τό ζεῦγος $\{G, f(z)\}$ ἀποτελούμενον ἀπό τό πεδίον ὁρισμοῦ μιᾶς μονοτίμου ἀναλυτικῆς συναρτήσεως καί ἀπό αὐτήν ταύτην τήν συνάρτησιν καλεῖται ***στοιχεῖον μέ πεδίον τό*** G. Δύο στοιχεῖα $\{G_1, f_1(z)\}$, $\{G_2, f_2(z)\}$ θά λέγωμεν ὅτι εἶναι ἴσα

ἐάν $G_1 \equiv G_2$ καί $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Δύο στοιχεῖα $\{G_1, f_1(z)\}$ καί $\{G_2, f_2(z)\}$ θά λέγωμεν ὅτι εἶναι μία κατ' εὐθεῖαν ἀναλυτική ἐπέκτασις τό ἕνα τοῦ ἄλλου, ἐάν εἰς τό πεδίον $D = D_1 \cap D_2$ ἔχωμεν: $f_1(z) = f_2(z)$ διά κάθε $z \in D$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι: Ὁσάκις ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις $f_2(z)$ ὑπάρχει, αὕτη εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένη.

Ἐν τούτοις ἐάν ὑπάρχη μία ἀναλυτική ἐπέκτασις $f_3(z)$ τῆς $f_2(z)$ ἀπό τό πεδίον G_2 εἰς τό πεδίον G_3 τό ὁποῖον G_3 τέμνει τό G_1, ὡς δεικνύεται εἰς τό Σχῆμα 1, δέν εἶναι ἀναγκαῖον ν' ἀληθεύη ἡ σχέσις $f_3(z) = f_1(z)$ διά κάθε $z \in G_1 \cap G_3$.

Ἄς σημειωθῆ ὅτι, εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ συνάρτησις ὅπου ὁρίζεται ὑπό τοῦ τύπου :

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{διά κάθε } z \in G_1 \\ f_2(z) & \text{διά κάθε } z \in G_2 \end{cases}$$

εἶναι ἀναλυτική ἐπέκτασις ἀμφοτέρων τῶν συναρτήσεων $f_1(z)$ καί $f_2(z)$ εἰς τό πεδίον $G = G_1 \cup G_2$.

Παραδείγματα: 1ον/ Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό τῆς δυναμοσειρᾶς :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (1)$$

Ἡ σειρά (1) συγκλίνει, ἐάν, καί μόνον ἐάν, $|z| < 1$.

Ἡ δυναμοσειρά (1) εἶναι τό ἀνάπτυγμα κατά Maclaurin τῆς συναρτήσεως $\frac{1}{1-z}$.

Ὅθεν :

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \text{ὅταν } |z| < 1$$

καί ἡ συνάρτησις $f_1(z)$ δέν ὁρίζεται ὑπό τῆς δυναμοσειρᾶς, ὅταν $|z| \geq 1$.

Ἤδη ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν :

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \text{μέ } z \neq 1.$$

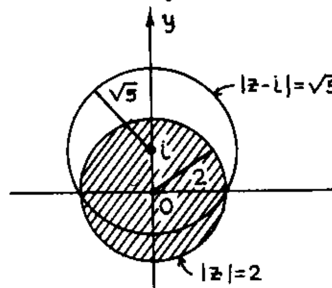
ἡ ὁποία ὁρίζεται καί εἶναι ἀναλυτική παντοῦ ἐκτός τοῦ σημείου $z=1$. Ἐπειδή εἰς τό πεδίον $|z| < 1$ ἔχομεν $f_1(z) = f_2(z)$, ἡ συνάρτησις $f_2(z)$ εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς $f_1(z)$ εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ἐκτός τοῦ σημείου $z=$

Εἶναι δέ ἡ $f_2(z)$ ἡ μοναδική ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς $f_1(z)$ ἐπί πλέον δέ τό

ζεῦγος $\{|z|<1, f_1(z)\}$ εἶναι ἕνα στοιχεῖον τῆς $f_2(z)$.

2ον/. Ἄς θεωρήσωμεν τάς συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπό τῶν δυναμοσειρῶν: $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ καί $f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$.

Ἐφαρμόζοντες τό κριτήριον τῶν λόγων ἡ πρώτη σειρά συγκλίνει διά $|z|<2$ (βλ. Σχ.1). Αὕτη δέ εἶναι μία γεωμετρική σειρά μέ πρῶτον ὅρον τό $1/2$ καί λόγον $z/2$.



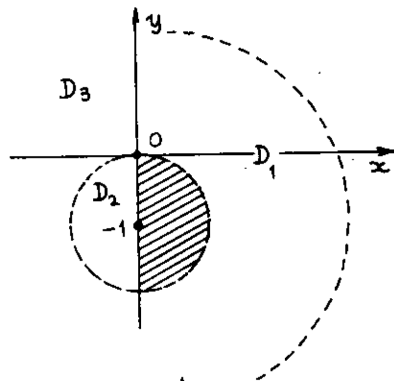
Σχ. 1

Αὐτῆς δυνάμεθα νά εὕρωμεν τό ἄθροισμά της καί τό ὁποῖον εἶναι ἡ συνάρτησις $f_1(z)=\frac{1/2}{1-z/2}=\frac{1}{2-z}$

Ὁμοίως ἡ δευτέρα σειρά, βάσει τοῦ ἰδίου κριτηρίου, συγκλίνει διά $\left|\frac{z-i}{2-i}\right|<1 \Leftrightarrow |z-i|<\sqrt{5}$ (βλ. Σχ. 1). Καί αὐτή δέ εἶναι μία γεωμετρική σειρά μέ πρῶτον ὅρον τόν $1/2-i$ καί λόγον τόν $\frac{z-i}{2-i}$, δύναται δέ νά ἀθροισθῆ καί τό ἄθροισμά της εἶναι ἡ συνάρτησις $f_2(z)=\frac{1/(2-i)}{1-\frac{z-i}{2-i}}=\frac{1}{2-z}$. Ἐπειδή δέ αἱ δύο δυναμοσειραί παριστοῦν τήν αὐτήν συνάρτησιν εἰς τό χωρίον $D=\{z:|z|<2\}\cap\{z:|z-i|<\sqrt{5}\}$ δηλ. τό κοινόν χωρίον τό εὑρισκόμενον εἰς τό ἐσωτερικόν τῶν κύκλων $|z|=2$ καί $|z-i|=\sqrt{5}$, ἕπεται ὅτι, ἑκάστη εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς ἄλλης.

3ον/. Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$f_1(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt}\,dt \quad (1)$$



Σχ. 1

Τό ὁλοκλήρωμα (1) ὑπάρχει, μόνον ὅταν $\operatorname{Re}z>0$ καί τότε δίδει:

$$f_1(z)=\frac{1}{z} \quad (2)$$

Ὁ τόπος ὁρισμοῦ D_1 τῆς $f_1(z)$, μέσω τοῦ ὁλοκληρώματος (1), δηλ. ὁ τόπος $\operatorname{Re}z>0$, δεικνύεται εἰς τό Σχ. 1. Ἡ δέ συνάρτησις $f_1(z)=\frac{1}{z}$ εἶναι ἀναλυτική εἰς αὐτόν.

Ἔστω ἤδη καί ἡ συνάρτησις $f_2(z)$, ἡ ὁποία ὁρίζεται μέσω τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς:

$$f_2(z)=i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{i}\right)^n,\ |z+i|<1 \quad (3).$$

Ἡ σειρά (3) συγκλίνει ἐντός τοῦ μοναδιαίου κύκλου D_2 τοῦ ἔχοντος κέντρον τό σημεῖον $z=-i$, τό δέ ἄθροισμά της ὑπολογίζεται κατά τά γνωστά καί εἶναι:

$$f_2(z) = i \cdot \frac{1}{1-\frac{z+i}{i}} = \frac{1}{z}, \quad \text{μέ } |z+i|<1 \qquad (4)$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι: $f_1(z) \equiv f_2(z)$ διά κάθε $z \in D_1 \cap D_2$ (βλ. σχῆμα τό γραμμοσκιασθέν τμῆμα). Οὕτω ἡ $f_2(z)$ εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς $f_1(z)$ ἐντός τοῦ D_2.

Τέλος ἡ συνάρτησις $F(z)=\frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις ἀμφοτέρων τῶν συναρτήσεων $f_1(z)$ καί $f_2(z)$ ἐντός τοῦ πεδίου D_3 πού εἶναι ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ἐκτός τοῦ σημείου $z=0$. Συσχετίσατε τό ἀνωτέρω παράδειγμα μέ τό Πόρισμα VII-4-1.

4ον/. Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z+z^2+z^6+z^{24}+\cdots$ (1) καί ὁ μοναδιαῖος δίσκος E, δηλ. ὁ $|z|<1$. Λέγομεν δέ ὅτι, ἡ περιφέρεια $|z|=1$ εἶναι ἕνα "φυσικόν σύνορον" τῆς σειρᾶς (1), δηλ. ὅτι δέν ὑπάρχει ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς $f(z)$ εἰς ἕνα εὐρύτερον πεδίον G περιέχον τό E. Πράγματι, ἐάν ὑπῆρχεν μία τοιαύτη ἀναλυτική ἐπέκτασις, τότε προφανῶς τό G θά περιεῖχεν κάποιον τόξον γ τοῦ μοναδιαίου κύκλου καί κατά συνέπειαν τό ὅριον:

$$\lim_{\rho\to 1-0} f(\rho \cdot e^{2\pi i a}) \quad \text{ὅπου } z=\rho e^{2\pi i a}$$

θά πρέπει νά εἶναι πεπερασμένον δι' ὅλα τά $e^{2\pi i a} \in \gamma$.

Ὡς θά δείξωμεν κατωτέρω τοῦτο εἶναι ἄτοπον καθ' ὅτι, τό τόξον γ πρέπει νά περιέχη σημεῖα $e^{2\pi i a}$ μέ a ρητό καί ἕνα τοιοῦτον ὅριον δέν εἶναι πεπερασμένο. Πράγματι, ἔστω $a=p/q$, ὅπου $p,q>0$ εἶναι ἀκέραιοι καί ἔστω $z_0=e^{2\pi i a}$ καί $z=\rho \cdot z_0$, ὅπου $0<\rho<1$.

Ἡ συνάρτησις $f(z)=f(\rho e^{2\pi i a})$ γράφεται:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!} \qquad (2)$$

διότι, διά $n \geq q$ ἰσχύει $z^{n!}=(\rho \cdot e^{2\pi i p/q})^{n!} = \rho^{n!}\left(e^{2\pi i p/q}\right)^{n!} =$

$$= \rho^{n!} e^{2\pi i \cdot n! \cdot p/q} = \rho^{n!} e^{2\pi i k} = \rho^{n!} \cdot 1 = \rho^{n!}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ἔστω $M = 2q + N$, ὅπου N εἶναι ἕνας αὐθαίρετος θετικός ἀκέραιος, ὅτε ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{M} \rho^{n!} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \rho^{n!} \right| \qquad \text{ἤ}$$

$$|f(z)| \geq \left| \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{M} \rho^{n!} \right| \geq \sum_{n=q}^{M} \rho^{n!} - \sum_{n=1}^{q-1} |z|^{n!} \qquad (3)$$

Τό πρῶτον ἄθροισμα τῆς ἀνισότητος (3) ἔχει $M-q+1$ τό πλῆθος ὅρους, ἐνῶ τό δεύτερον ἔχει $q-2$ τό πλῆθος ὅρους. Ἀντικαθιστῶμεν τούς ὅρους τοῦ πρώτου ἀθροίσματος μέ τόν μικρότερον πάντων ὅρον $\rho^{M!}$, εἰς δέ τό δεύτερον ἄθροισμα ἀντικαθιστῶμεν πάντας τούς ὅρους πού εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος ὑπό τῆς μονάδος καί τότε ἡ ἀνισότης (3) γίνεται:

$$\left| f\left(\rho e^{2\pi i p/q}\right) \right| \geq (M-q+1)\,\rho^{M!} - (q-1) \qquad (4)$$

Ἤδη τοῦ $\rho \to 1$ τό δεξιόν μέλος τῆς (4) τείνει πρός τόν ἀριθμόν $M-q+1-q+1 = M-2q+2 = N+2$.

Ὥστε, $\left| f\left(\rho e^{2\pi i p/q}\right) \right| > N+2$ (5) Ἐπειδή ὁ N εἶναι τυχών ἀκέραιος ἐκ τῆς (5) ἕπεται ὅτι, ἡ $f(z)$ διά τά σημεῖα τοῦ θεωρηθέντος τόξου τῆς περιφερείας δέν εἶναι φραγμένη.

5ον/ Ἔστω G_k εἶναι τό πεδίον τό ὁριζόμενον ὑπό τῶν ἀνισοτήτων:

$$\frac{(k-1)\pi}{2} < \arg z < \frac{(k+1)\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

καί ἔστω $f_k(z)$ ἡ συνάρτησις ἡ ὁριζομένη ὑπό τοῦ τύπου:

$$f_k(z) = \log|z| + i \cdot \theta_k \qquad (2)$$

ὅπου θ_k εἶναι ἡ τιμή τοῦ $\arg z$ ἱκανοποιοῦσα τήν συνθήκην (1). Τότε τά στοιχεῖα $\{G_k, f_k(z)\}$, $\{G_\ell, f_\ell(z)\}$ εἶναι μία κατ' εὐθεῖαν ἀναλυτική ἐπέκτασις τό ἕνα τοῦ ἄλλου, ἐάν καί μόνον, ἐάν τό ℓ λαμβάνη μίαν τῶν τιμῶν $k-1$, k, $k+1$.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις

I. Σειραί Taylor

Δείξατε ὅτι:

1. i) $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\cdot(z+1)^n$, ὅταν $|z+1|<1$.

ii) $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$, ὅταν $|z-2|<2$

iii) $\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$, ὅταν $0<|z|<4$

2. Νά ἀναπτυχθοῦν εἰς σειράν Taylor αἱ κάτωθι συναρτήσεις καί νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτίς συγκλίσεως τῶν ἀντιστοίχων δυναμοσειρῶν:

i) $\log\frac{1+z}{1-z}$ ii) $\frac{z}{z^2-4z+13}$ iii) $\int_0^z e^{z^2}dz$ iv) $\int_0^z \frac{\text{ημ} z}{z}\,dz$

3. Δείξατε ὅτι:

i) $\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1})$, ὅταν $|z|<1$

ii) $\frac{1}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1)\cdot z^n$, ὅταν $|z|<1$.

4. Νά εὑρεθοῦν οἱ τέσσαρες πρῶτοι ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος κατά Taylor εἰς τό σημεῖον $z=0$ ἑκάστης τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

i) $e^{1/1-z}$ ii) $\text{ημ}\frac{1}{1-z}$ iii) $e^{z\,\text{ημ} z}$ iv) $\sqrt{\text{συν} z}$, ὅπου $\sqrt{\text{συν} 0}=1$

5. Νά ἀναπτυχθοῦν εἰς δυναμοσειράν τοῦ $z-1$ καί ἀκολούθως νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτίς συγκλίσεως τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

i) $\frac{z}{z+2}$ ii) $\frac{z}{z^2-2z+5}$ iii) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$

6. Δείξατε ὅτι οἱ συντελεσταί C_n τοῦ ἀναπτύγματος:

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$ $(n \geq 2)$. Νά εὑρεθοῦν οἱ C_n καί ἡ

αὐτῆς συγκλίσεως τῆς σειρᾶς.

Σημ: Οἱ ἀριθμοὶ C_n καλοῦνται *ἀριθμοὶ τοῦ Fibonacci*

7. Δείξατε ὅτι ἡ σειρά:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{1-z^k} \qquad (1)$$

παριστᾶ μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν ἐντὸς τοῦ δίσκου $|z|<1$. Ἀκολούθως νὰ ἀναπτυχθῆ εἰς σειρὰν Taylor ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις $f(z)$.

8. Δείξατε ὅτι διὰ $z\neq 0$ ἔχομεν:

$$\frac{\eta\mu(z^2)}{z^4}=\frac{1}{z^2}-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^6}{5!}-\frac{z^{10}}{7!}+\cdots$$

II. Σειραὶ Laurent.

9. Εἰς ἑκάστην τῶν κάτωθι ἀσκήσεων νὰ ἀναπτυχθῆ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἰς σειρὰν τοῦ Laurent ἑκάστη εἰς τὸν δεικνυόμενον ἔναντι αὐτῆς δακτύλιον ἢ εἰς περιοχὴν τοῦ δοθέντος σημείου.

i) $\frac{1}{z-2}$ εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων $z=0$ καὶ $z=\infty$

ii) $\frac{1}{(z-a)^k}$ $(a\neq 0,\ k=\text{φυσικός})$ εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων $z=0$ καὶ $z=\infty$

iii) $\frac{1}{(z+1)(z+4)}$ εἰς τὸν δακτύλιον $1<|z|<4$ ἢ τὸν $0<|z+1|<3$ ἢ τὸ πεδίον $|z|>4$ ἢ τὸ $|z|<1$.

iv) $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)\cdot(z^2+1)}$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=2$ καὶ εἰς τὸν δακτύλιον $1<|z|<2$.

v) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων $z=i$ καὶ $z=\infty$

vi) $\text{συν}\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=2$.

vii) $e^{z+\frac{1}{z}}$ εἰς τὸ πεδίον $0<|z|<\infty$

viii) $\eta\mu z\,\eta\mu\frac{1}{z}$ εἰς τὸ πεδίον $0<|z|<\infty$

10. Νὰ εὑρεθῆ τὸ πρωτεῦον μέρος τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent ἑκάστης τῶν κάτωθι

συναρτήσεων εἰς τό δεικνυόμενον ἔναντι ἑκάστης σημεῖον:

i) $\frac{z}{(z+2)^2}$ $(z_0=-2)$ ii) $\frac{z-1}{\eta\mu^2 z}$ $(z_0=0)$ iii) $\frac{1}{\eta\mu\pi z}$ $(z_0=n)$

iv) $\sigma\varphi\pi z$ $(z_0=n)$ v) $\frac{e^z+1}{e^z-1}$ $(z_0=2\pi i)$ vi) $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}$ $(z_0=ib,\ b>0)$.

11. Νά ἀναπτυχθῆ εἰς σειράν τοῦ Laurent ἡ συνάρτησις $\sinh z$ κατά τάς δυνάμεις τοῦ $z-\pi i$ διά νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim_{z\to\pi i}\frac{\sinh z}{z-\pi i}=-1$

III. Ἰδιάζοντα σημεῖα.

12. Νά εὑρεθοῦν τά μεμονωμένα ἰδιάζοντα σημεῖα τῶν κάτωθι συναρτήσεων καθώς καί ἡ φύσις αὐτῶν.

i) $\frac{1}{z^3-z^5}$ ii) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$ iii) $\frac{z^5}{(1-z)^2}$ iv) $\frac{z^2+1}{e^z}$ v) $z\cdot e^{\frac{1}{z}}$ vi) $\frac{1}{\eta\mu z}$

vii) $\varepsilon\varphi^2 z$ viii) $\sigma\varphi z-\frac{2}{z}$ ix) $\eta\mu z\frac{1}{z}$ x) $e^{\varepsilon\varphi\frac{1}{z}}$ xi) $e^{-z}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{z}$ xii) $z^n\eta\mu\frac{1}{z}$ (n: ἀκέραιος.

13. Ἔστω ἡ ρητή συνάρτησις: $f(z)=\frac{a_0+a_1 z+\cdots+a_m z^m}{b_0+b_1 z+\cdots+b_n z^n}$, ὅπου $a_m\neq 0$, $b_n\neq 0$. Προσδιορίσατε τά πεπερασμένα ἰδιάζοντα σημεῖα αὐτῆς, ὑποθέτοντες ὅτι ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής δέν ἔχουν κοινόν παράγοντα. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει μίαν αἱρομένην ἀνωμαλίαν εἰς τό σημεῖον $z=\infty$, ἐάν $m\leq n$ καί ἕναν πόλον τάξεως $m-n$ εἰς τό $z=\infty$, ἐάν $m>n$.

14. Νά ἐξετασθῆ ἡ συμπεριφορά εἰς τό σημεῖον $z=\infty$ τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων:

i) $\frac{z^3}{(1+z)^2}$ ii) $\frac{e^z}{1+z^3}$ iii) $z\cdot e^{-z}$ iv) $\frac{z}{\eta\mu z}$

v) $\sigma\varphi\frac{1}{z}$ vi) $\sigma\varphi\frac{1}{z}$ vii) $\eta\mu\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$ viii) $e^{\varepsilon\varphi\frac{1}{z}}$

15. Νά παρασταθῆ ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{z+1}{z-1}$ (α) εἰς μίαν σειράν τοῦ Maclaurin καί νά εὑρεθῆ τό κατάλληλον χωρίον δι' αὐτό τό ἀνάπτυγμα. (β) εἰς μίαν σειράν τοῦ Laurent διά τό πεδίον $|z|>1$.

Ἀπαντ: (α) $-1-2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$ $(|z|<1)$ (β) $1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}$ $(|z|>1)$.

16. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει ἕναν πόλον τάξεως m εἰς τό z_0. Δείξατε ὅτι ἡ $f^{(n)}(z)$ ἔχει ἕναν πόλον τάξεως $m+n$ εἰς τό z_0.

17. Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἔκφρασιν:

$$\lim_{z\to z_0}(z) \qquad (1)$$

ὅπου τό $z_0 \neq \infty$ εἶναι ἕνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον τῆς $f(z)$.

Δείξατε ὅτι:

α) Τό ὅριον (1) ὑπάρχει καί εἶναι πεπερασμένον, ἐάν τό σημεῖον z_0 ἔχει μίαν διορθωμένην ἀνωμαλίαν.

β) Τό ὅριον (1) ὑπάρχει καί εἶναι ἄπειρον, ἐάν τό z_0 εἶναι ἕνας πόλος.

γ) Τό ὅριον (1) δέν ὑπάρχει, ἐάν τό z_0 εἶναι ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον.

Διά τήν περίπτωσιν $z=\infty$ ἐξετάζομεν τό ὅριον:

$$\lim_{\zeta\to 0} f\left(\frac{1}{\zeta}\right), \text{ ὅπου } \zeta=\frac{1}{z}$$

καί ἔχομεν τά ἀντίστοιχα συμπεράσματα.

IV. Ἐπί τῆς ὁμαλῆς συγκλίσεως.

18. Προσδιορίσατε τό χωρίον ὅπου ἑκάστη τῶν κάτωθι σειρῶν συγκλίνει ὁμαλῶς.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{συν}\, n z}{n^3}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$

Ἀπάντ. i) $|z|\leq 1$ ii) $|z-i|\leq 1$ iii) $|z|\geq R$ ὅπου $R>1$ iv) Διά κάθε z.

19. Διά διαφορίσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς σειρᾶς

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\cdots \qquad |z|<1$$

νά εὑρεθῆ τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot z^n$ διά $|z|<1$. Ἐν συνεχείᾳ νά εὑρεθῆ τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ διά $|z|<1$.

20. Δείξατε ὅτι: α) $\frac{1}{1+z^2} = 1-z^2+z^4-z^6+\cdots$ διά $|z|<1$

β) Ἐάν ἐκλέξωμεν αὐτόν τόν κλάδον τῆς $f(z)=\text{τοξ εφ}\, z$ τοιοῦτον, ὥστε $f(0)=0$, διά χρησιμοποιήσεως τοῦ (α) ἀποτελέσματος δείξατε ὅτι:

$$\text{τοξ εφ}\, z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots$$

γ) Δείξατε ὅτι: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

21. Νά ἐξετάσετε τήν συμπεριφοράν τῶν κάτωθι δυναμοσειρῶν εἰς τό σύνορον τοῦ κύκλου συγκλίσεως.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

22. Δείξατε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς κάθε κλειστόν δίσκον $|z| \leq r < 1$ ἀλλά οὐχί εἰς τόν ἀνοικτόν δίσκον $|z| < 1$.

23. Δείξατε ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς τόν κλειστόν δίσκον $|z| \leq 1$ καί ἀποκλίνει διά $|z| > 1$.

24. Εἰς τάς κάτωθι σειράς νά εὑρεθῆ τό σύνολον εἰς τό ὁποῖον αὗται συγκλίνουν ὁμαλῶς:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \log n}$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ημ} nz}{n}$

V Ἐπί τῆς ὁμαλῆς ἐπεκτάσεως.

25. Δείξατε ὅτι, ἡ $f_2(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n$ εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, δείχνοντας γραφικῶς τά πεδία συγκλίσεως αὐτῶν τῶν σειρῶν.

26. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $f_2(z) = \frac{1}{z^2+1}$ $(z \neq \pm i)$ εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ ἐντός τοῦ πεδίου τοῦ ἀποτελουμένου ἀπό ὅλα τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τῶν σημείων $z = \pm i$.

27. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $1/z^2$ παριστᾶ τήν ἀναλυτικήν ἐπέκτασιν τῆς συναρτήσεως τῆς ὁριζομένης ὑπό τῆς σειρᾶς $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot(z+1)^n$, $(|z+1| < 1)$, ἐντός τοῦ

πεδίου τοῦ ἀποτελουμένου ἀπό πάντα τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τοῦ $z=0$.

28. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\frac{1}{z^2+1}$ εἶναι ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως $f(z)=\int_0^\infty e^{-zt}\,\eta\mu t\,dt$ ἐντός τοῦ πεδίου τοῦ ἀποτελουμένου ἀπό πάντα τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐκτός τῶν $z=\pm i$.

29. Ἐάν G_1 καί G_2 εἶναι οἱ δίσκοι $|z|<1$ καί $|z-2|<1$ ἀντιστοίχως καί ἔστω

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad f_2(z)=i\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-2)^n}{n}$$

Δείξατε ὅτι τά στοιχεῖα $\{G_1, f_1(z)\}$ καί $\{G_2, f_2(z)\}$ εἶναι ἀναλυτική ἐπέκτασις τό ἕνα τοῦ ἄλλου.

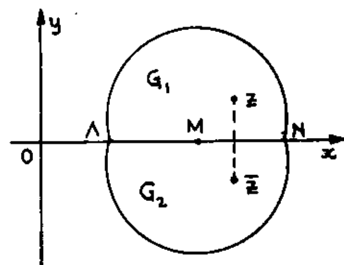
30. Δείξατε ὅτι αἱ συναρτήσεις αἱ ὁριζόμεναι ὑπό τῶν σειρῶν $f_1(z)=1+az+a^2z^2+\cdots$ καί $f_2(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{(1+a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1+a)^2\cdot z^2}{(1-z)^3}-\cdots$ εἶναι ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις ἡ μία τῆς ἄλλης.

31. Δείξατε ὅτι ἡ δυναμοσειρά $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ παριστᾶ μίαν ἀναλυτικήν συνάρτησιν ἐντός τοῦ ἀνοικτοῦ κύκλου $|z|<1$ καί ὅτι ἔχει τήν περιφέρειαν $|z|=1$ ὡς ἕνα φυσικόν σύνορον.

Ὑπόδ: Χρησιμοποιήσατε τήν ταυτότητα $f(z)=z^2+z^4+\cdots+z^{2^k}+f(z^{2^k})$ καί ἐν συνεχεία δείξατε ὅτι διά κάθε σημεῖον τῆς μορφῆς $\gamma=\sqrt[2^k]{1}$ (K: φυσικός ἀριθμός) ἡ $f(t\gamma)\longrightarrow\infty$ καθώς τό $t\to 1$ $(0<t<1)$.

32. (Ἀρχή τοῦ κατοπτρισμοῦ τοῦ Schwartz).

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $F_1(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό χωρίον G_1 (Βλ. Σχ. 1) καί ὅτι ἡ $F_1(z)$ λαμβάνει πραγματικάς τιμάς ἐπί τοῦ τμήματος ΛΜΝ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος. Ἔστω G_2 τό συμμετρικόν τοῦ χωρίου G_1 ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν x καί ἔστω $F_2(z)$ ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις $F_1(z)$ ἐπί τοῦ G_2. Δείξατε ὅτι θά ἔχωμεν: $F_2(z)=\overline{F_1(\overline{z})}$.



Σχ. 1

Ἀπόδειξις: Προφανῶς ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τῶν x θὰ ἔχωμεν:

$F_1(z) = F_1(x) = \overline{F_1(x)} = \overline{F_1(\bar{z})}$.

Συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα VII-5-1 ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\overline{F_1(\bar{z})} \equiv F_2(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ πεδίον G_2.

Ἔστω $F_1(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ πεδίον G_1 θὰ ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann ἤτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

ὅπου αὐταὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς.

Ἔστω ἤδη $F_1(\bar{z}) = F_1(x-iy) = u(x,-y) + iv(x,-y)$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\overline{F_1(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y) \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ $\overline{F_1(\bar{z})}$ ἀναλυτικὴ εἰς τὸ χωρίον G_2, ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν διὰ $y>0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial(-y)} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial u}{\partial(-y)} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} \qquad (3)$$

Αἱ σχέσεις (3) εἶναι ὅμως ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς (1), ἐπειδὴ $\frac{\partial(-v)}{\partial(-y)} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial(-y)} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(-v)}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Ὅθεν ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἀποτέλεσμα.

Παρατήρησις: Τὸ ἀνωτέρω συμπέρασμα τῆς ἀρχῆς τοῦ Κατοπτρισμοῦ δύναται νὰ ἐπεκταθῆ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἀντὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΛΜΝ ἔχομεν μίαν καμπύλην γραμμήν.

33. Δείξατε ὅτι, ἡ συνάρτησις ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου $F_1(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt}\,dt$ εἶναι ἀναλυτικὴ δι' ὅλα τὰ σημεῖα z διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν $\mathrm{Re}\, z > 0$. Ἀκολούθως εὕρατε μίαν συνάρτησιν ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς $F_1(z)$ εἰς τὸ χωρίον $\mathrm{Re}\, z < 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ (RESIDUES)

§ 1. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΝ ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΜΙΑΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΕΝΑ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΟΝ ΙΔΙΑΖΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΑΥΤΗΣ.

Ἔστω z_0 ἕνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον μιᾶς μονοτίμου ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$. Εἰς μίαν περιοχὴν αὐτοῦ τοῦ σημείου, ὡς γνωστόν, ἡ $f(z)$ δύναται ν'ἀναπτυχθῇ εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Laurent, ἤτοι:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \qquad (1)$$

ὅπου
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \qquad (2)$$

καί C εἶναι μία ἁπλῆ κλειστή καμπύλη διαγραφομένη κατά τὴν θετικὴν φορὰν τοιαύτη, ὥστε ἡ $f(z)$ νά εἶναι ἀναλυτική ἐπ' αὐτῆς καί εἰς τό ἐσωτερικόν της ἐκτός ἀπό τό σημεῖον z_0. Ἐκ τοῦ τύπου (2) διά $n=-1$ λαμβάνομεν:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, d\zeta \qquad (3)$$

Ὁρισμός VIII-1-1. *Καλοῦμεν ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον (Residue) τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς ἕνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον z_0 αὐτῆς, τόν μιγαδικόν ἀριθμόν, ὅστις ἰσοῦται πρός τήν τιμήν τοῦ ὁλοκληρώματος $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\, d\zeta$, θεωρουμένη κάθε κλειστή καμπύλη C ἐπί τῆς ὁποίας γίνεται ἡ ὁλοκλήρωσις ὅτι διαγράφεται κατά τήν θετικήν φοράν καί ὅτι αὕτη κεῖται εἰς τό πεδίον ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική καί περιέχουσα ἕνα μοναδικόν ἰδιάζον σημεῖον z_0 τῆς $f(z)$.*

Τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον τῆς $f(z)$ εἰς τό μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον z_0 αὐτῆς θά τό συμβολίζωμε οὕτω: $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Εἶναι λοιπόν:
$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\, d\zeta \qquad (4).$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐάν τό σημεῖον z_0 εἶναι ἕνα ὁμαλόν σημεῖον ἤ ἡ $f(z)$ ἔχη μίαν αἰρομένην ἀνωμαλίαν εἰς τό z_0, τότε τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον τῆς $f(z)$ εἰς τό $z=z_0$ εἶναι μηδέν.

Διά νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον τῆς $f(z)$ εἰς τό μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον $z=z_0$, δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (3), ἤτοι:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta = c_{-1} \qquad (5)$$

Ὅθεν, ὁ συντελεστής c_{-1} τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent τῆς $f(z)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ μεμονωμένου ἰδιάζοντος σημείου $z=z_0$ αὐτῆς ἰσοῦται πρός τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον τῆς συναρτήσεως ταύτης εἰς τό ἐν λόγῳ σημεῖον.

Διάφοροι περιπτώσεις:

I. Ἐάν τό σημεῖον $z=z_0$ εἶναι ἕνας πόλος τῆς $f(z)$ n-τάξεως, τότε θά ἔχωμεν:

$$f(z) = (z-z_0)^{-n}\cdot g(z)$$

ὅπου τό σημεῖον z_0 εἶναι ὁμαλόν τῆς $g(z)$.

Συμφώνως πρός τόν ὁρισμόν ἔχομεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\, g^{(n-1)}(z_0) \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως, $g(z) = f(z)\cdot(z-z_0)^n$ καί $g^{(n-1)}(z) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]$

Συνεπῶς $g^{(n-1)}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^n\right] \qquad (2)$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) τελικῶς λαμβάνομεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(z-z_0)^n f(z)\right\}.$$

Ὅθεν, τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον τῆς $f(z)$ εἰς ἕναν πόλον $z=z_0$, n-τάξεως δίδεται ὑπό τοῦ κάτωθι τύπου:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}\left\{(z-z_0)^n f(z)\right\}}{dz^{n-1}}} \qquad (3)$$

II. Ἐάν τό σημεῖον $z=z_0$ εἶναι ἕνας ἁπλοῦς πόλος τῆς $f(z)$, τότε θά ἔχωμεν:

$$f(z)=C_{-1}\cdot(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1\cdot(z-z_0)+C_2\cdot(z-z_0)^2+\cdots$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος ἐπί $(z-z_0)$ καί ἐν συνεχεία λαμβάνοντες τά ὅρια αὐτοῦ, τοῦ $z\to z_0$, εὑρίσκομεν:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)=C_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)$$

Ὅθεν, ὅταν τό σημεῖον $z=z_0$ εἶναι ἕνας ἁπλοῦς πόλος τῆς $f(z)$, τότε τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον ταύτης εἰς τό σημεῖον $z=z_0$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου.

$$\boxed{C_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)} \qquad (4).$$

III. Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου z_0 παρίσταται ὑπό μορφήν λόγου δύο ἀναλυτικῶν συναρτήσεων, ἤτοι ἄν:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{ὅπου } \varphi(z_0)\neq 0$$

καί τό σημεῖον z_0 εἶναι ἕνας μηδενίζων πρώτης τάξεως τῆς $\psi(z)$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\psi(z)=(z-z_0)\,\psi'(z_0)+(z-z_0)^2\,\frac{\psi''(z_0)}{2}+\cdots, \text{ ὅπου } \psi'(z_0)\neq 0.$$

Ἐκ τῆς II περιπτώσεως ἕπεται, ὅτι τό z_0 εἶναι ἁπλός πόλος τῆς $f(z)$ καί ὡς ἐκ τούτου θά ἔχωμεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)\psi'(z_0)+(z-z_0)^2\frac{\psi''(z_0)}{2}}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)+(z-z_0)\frac{\psi''(z_0)}{2}+\cdots}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Ὅθεν, ἐάν $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ καί ἡ $\psi(z)$ ἔχῃ τό $z=z_0$ μηδενίζοντα πρώτης τάξεως, τότε θά ἔχωμεν:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}} \qquad (5)$$

IV. Ἔστω ἡ $f(z)$ ἔχει τό σημεῖον $z=\infty$ ἕνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον. Τότε ἐκτός ἑνός κύκλου μέ ἀρκούντως μεγάλη ἀκτῖνα ἔχοντος κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων, ἡ συνάρτησις εἶναι ἀναλυτική. Ἐάν c εἶναι ἕνας τοιοῦτος κύκλος, τότε τό ὁλοκλήρωμα:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_-}f(\zeta)\,d\zeta,$$

ὅπου c_- παριστᾶ τόν κύκλον c διαγραφόμενον κατά τήν ἀρνητικήν φοράν,

εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου καί καλεῖται ***ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον*** τῆς $f(z)$ εἰς τό μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον αὐτῆς $z=\infty$.

Θέτοντες $z=R\cdot e^{-i\theta}$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου C καί καλοῦντες $\tau=\frac{1}{R}$ θά ἔχωμεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(Re^{-i\theta})\cdot i\cdot Re^{-i\theta}\,d\theta=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{\tau e^{i\theta}}\right)\cdot\frac{1}{\tau e^{i\theta}}\,d\theta=$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{\tau\cdot e^{i\theta}}\right)\frac{d(\tau\cdot e^{i\theta})}{(\tau\cdot e^{i\theta})^2}=\frac{-1}{2\pi i}\int_C f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

ὅπου C παριστᾶ ἕναν κύκλον ἀκτῖνος τ πέριξ τῆς ἀρχῆς, διαγραφόμενον κατά τήν θετικήν φοράν.

Ὅθεν, τό $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ $\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f(1/z)}{z^2}$ εἰς τήν ἀρχήν, ἤτοι:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f(1/z)}{z^2}} \qquad (6)$$

Παραδείγματα: 1ον/ Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{z}{z^n-1}$. Αὕτη ἔχει ὡς ἰδιάζοντα σημεῖα τά $z_k=\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ καί πάντα αὐτά τά σημεῖα εἶναι ἁπλοί πόλοι. Συμφώνως πρός τόν τύπον (5), θά ἔχωμεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)=\frac{z_k}{n\cdot z_k^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{z_k^2}{z_k^n}=\frac{1}{n}\cdot z_k^2=\frac{1}{n}\cdot e^{i\frac{4\pi k}{n}},\ \text{διότι}\ z_k^n=1.$$

2ον/ Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{e^{-2z}}{z^3}$, ἡ ὁποία ἔχει ἕναν πόλον 3-τάξεως εἰς τό σημεῖον $z=0$. Συμφώνως πρός τόν τύπον (3), θά ἔχωμεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[e^{-2z}\right]=\frac{1}{2!}\cdot\lim_{z\to 0}\left(4\cdot e^{-2z}\right)=\frac{1}{2}\cdot 4e^0=2.$$

3ον/ Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{z+1}{z^2+9}$, ἡ ὁποία ἔχει ἁπλούς πόλους τά σημεῖα $z=\pm 3i$. Συμφώνως πρός τόν τύπον (4), θά ἔχωμεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=3i} f(z)=\lim_{z\to 3i}\left\{(z-3i)\cdot\frac{z+1}{z^2+9}\right\}=\lim_{z\to 3i}\frac{z+1}{z+3i}=\frac{3i+1}{6i}=\frac{3-i}{6}.$$

4ον/ Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^n}$. Αὕτη ἔχει ἰδιάζοντα τά σημεῖα $z=\pm i$, ἀμφότερα πόλους n-τάξεως.

Συμφώνως πρός τόν τύπον (3), θά έχωμεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-i)^n \cdot \frac{1}{(1+z^2)^n}\right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+i)^n}\right]$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}}\Bigg|_{z=i} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}.$$

5ον/ Έστω ή συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{\eta\mu z}$, ή όποία έχει τά σημεία $z_\kappa = \kappa\pi, \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ άπλούς πόλους. Συμφώνως πρός τόν τύπον (5), θά έχωμεν:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\kappa} f(z) = \frac{1}{[\eta\mu z]'_{z=z_\kappa}} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu z_\kappa} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \kappa\pi} = (-1)^\kappa, \quad \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

6ον/ Έστω ή συνάρτησις $f(z) = e^{-1/z}$, ή όποία έχει τό σημείον $z=0$ ούσιώδες άνώμαλον. Είναι δέ:

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots$$

Όθεν, $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -1.$

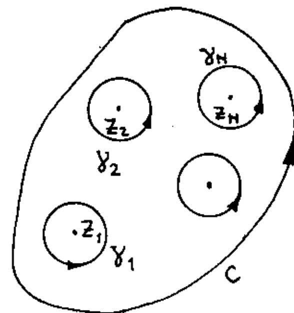
§2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Θεώρημα VIII-2-1. Έάν ή συνάρτησις $f(z)$ είναι άναλυτική έντός καί έπί μιάς τμηματικώς λείας καί κλειστής καμπύλης C έκτός τών μεμονωμένων ίδιαζόντων σημείων $z_1, z_2, \ldots, z_N$ κειμένων έντός τής C, τότε θά έχωμεν:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_\kappa} f(z).$$

Άπόδειξις: Όπως δεικνύεται καί είς τό Σχ. 1, έστωσαν $z_1, z_2, \ldots, z_N$ τά μεμονωμένα ίδιάζοντα σημεία τής $f(z)$ κείμενα έντός τής C καί $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ είναι κύκλοι έχοντες κέντρα τά έν λόγω σημεία άντιστοίχως καί έχοντες έπίσης άκτίνας τοιαύτας, ώστε ούτοι νά μήν τέμνουν τήν καμπύλην C καί νά μήν τέμνωνται μεταξύ των.

Αί καμπύλαι C καί $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ διαγράφονται κατά τήν θετικήν φοράν.



Σχ. 1.

Ώς γνωστόν (βλ. θεώρ. VI-2-2) θά έχωμεν:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{\kappa=1}^{N} \int_{\gamma_\kappa} f(z)dz \quad (1)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι, τό ἀνάπτυγμα κατά Laurent τῆς $f(z)$ πέριξ τοῦ σημείου z_k δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(k)}\cdot (z-z_k)^n \quad (k=1,2,\ldots,N) \qquad (2)$$

Ὁλοκληροῦντες ὅρον πρός ὅρον τήν σειράν (2) κατά μῆκος τῆς καμπύλης γ_k, ἡ δέ ὁλοκλήρωσις κατά ὅρους εἶναι δυνατή ἐπειδή ἡ σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπί τῆς περιφερείας γ_k, ἐπιτυγχάνομεν:

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=\int_{\gamma_k}\Big[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(k)}(z-z_k)^n\Big]dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{\gamma_k} C_n^{(k)}(z-z_o)^n\,dz$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(k)}\int_0^{2\pi}(\tau_k e^{i\theta})^n\,d(\tau_k e^{i\theta}) \quad \text{ἤ}$$

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\cdot\tau_k^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\,d\theta \qquad (3),$$

ὅπου τ_k εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς περιφερείας γ_k.

Ἀλλά:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi, & \text{ἐάν } n=-1\\ 0, & \text{ἐάν } n\neq-1\end{cases}$$

Ὅθεν, ἡ ἰσότης (3) γίνεται:

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz=2\pi i C_{-1}^{(k)} \quad (k=1,2,\ldots,N) \qquad (4)$$

Τέλος, λόγω τῶν (1) καί (4), λαμβάνομεν:

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_k} f(z)dz=\sum_{k=1}^{N}2\pi i C_{-1}^{(k)}=2\pi i\sum_{k=1}^{N}C_{-1}^{(k)}=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Ἐφαρμογή 1η. Νά ὑπολογισθῇ τό $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zt}\,dz}{z^2(z^2+2z+2)}$ κατά μῆκος τοῦ κύκλου C μέ ἐξίσωσιν $|z|=3$.

__Λύσις:__ Ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις $f(z)=\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$ ἔχει τό σημεῖον $z=0$ πόλον 2-τάξεως καί τά σημεῖα $z=-1\pm i$ ἁπλούς πόλους – ταῦτα εἶναι ρίζαι τῆς $z^2+2z+2=0$. Ἅπαντες οἱ πόλοι κεῖνται ἐντός τοῦ κύκλου $|z|=3$. Εἶναι δέ:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left\{z^2\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}=\lim_{z\to0}\frac{(z^2+2z+2)(te^{zt})-e^{zt}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}=\frac{t-1}{2}$$

$$\underset{z=-1+i}{Res} f(z) = \lim_{z\to-1+i}\left\{[z-(-1+i)]\cdot\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \lim_{z\to-1+i}\left\{\frac{e^{zt}}{z^2}\right\}\lim_{z\to-1+i}\left\{\frac{z+1-i}{z^2+2z+2}\right\} = \frac{e^{(-1+i)t}}{(-1+i)^2}\cdot\frac{1}{2i} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$\underset{z=-1-i}{Res} f(z) = \lim_{z\to-1+i}\left\{[z-(-1-i)]\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\} = \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος λαμβάνομεν:

$$\int_{|z|=3}\frac{e^{zt}\,dz}{z^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i\cdot(\text{ἄθροισμα τῶν ὁλοκλ. ὑπολοίπων})$$

$$= 2\pi i\cdot\left\{\frac{t-1}{2}+\frac{e^{(-1+i)t}}{4}+\frac{e^{(-1-i)t}}{4}\right\}$$

$$= 2\pi i\cdot\left\{\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\text{συν}t\right\} = (t-1)\pi i + e^{-t}\cdot\pi\cdot i\,\text{συν}t.$$

(βλ. συνέχεια 2ª ἐφαρμογή σελ. 231).

§ 3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑΝ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ.

Ἡ ἀναπτυχθεῖσα θεωρία τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων εἰς τάς δύο προηγουμένας παραγράφους εὑρίσκει διαφόρους ἐφαρμογάς οὐχί μόνον εἰς τόν ὑπολογισμόν τῶν ὁλοκληρωμάτων μιάς συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς, ἀλλά καί εἰς τόν ὑπολογισμόν διαφόρων ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων μιάς συναρτήσεως μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Ἀρκεῖ εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ὑπολογισμοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως ἐκτός ἀπό τήν κατάλληλον ἐκλογήν τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $f(z)$ νά ἐπιτυγχάνομεν καί μίαν κατάλληλον ἐκλογήν τῆς καμπύλης C ἐπί τῆς ὁποίας πρόκειται νά κάμνωμεν τήν ὁλοκλήρωσιν. Πρός τούτοις ταξινομοῦμεν τά ὁλοκληρώματα πού προτιθέμεθα νά ὑπολογίσωμεν εἰς τάς κάτωθι κατηγορίας:

I. <u>Ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς</u>: $\int_0^{2\pi} R(\text{συν}\theta,\text{ημ}\theta)\,d\theta$.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκλήρωμα :

$$I = \int_0^{2\pi} R(\text{συν}\theta,\text{ημ}\theta)\,d\theta \quad (1)$$

Ὅπου R εἶναι ρητή συνάρτησις τῶν συνθ, ημθ.

Ὁλοκληρώματα τοῦ τύπου (1) δύνανται νά ἀναχθοῦν εἰς ὁλοκληρώματα μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς κατά μῆκος μιᾶς κλειστῆς καμπύλης. Πρός τούτοις κάμνομεν ἀλλαγήν τῆς μεταβλητῆς ὁλοκληρώσεως εἰσά-

γοντες τὴν μιγαδικὴν μεταβλητὴν z, ἥτις συνδέεται μετὰ τῆς θ ὑπὸ τῆς σχέσεως $z=e^{i\theta}$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν:

$d\theta=\frac{1}{i}\frac{dz}{z}$, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ καὶ $\eta\mu\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, ὅπου $0\leq\theta\leq 2\pi$.

Τότε ἡ μιγαδικὴ μεταβλητὴ z κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας $|z|=1$ καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν. Οὕτω τὸ ὁλοκλήρωμα (1) μετασχηματίζεται εἰς τὸ κάτωθι ὁλοκλήρωμα:

$$I=\frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left(z+\frac{1}{z},\, z-\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} \qquad (2)$$

Οὕτω, εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα (2) ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις θὰ εἶναι προφανῶς μία ῥητὴ συνάρτησις τῆς μορφῆς:

$$Q(z)=\frac{a_0+a_1 z+\cdots+a_n z^n}{b_0+b_1 z+\cdots+b_m z^m} \qquad (3)$$

Ἡ συνάρτησις (3) εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z|=1$ παντοῦ, ἐκτὸς φυσικὰ ἀπὸ ἕνα πεπερασμένον ἀριθμὸν ἰδιαζόντων σημείων z_k, ὅπου $0\leq k\leq m$, τὰ ὁποῖα εἶναι μηδενίζοντες τοῦ παρονομαστοῦ τῆς $Q(z)$. Ἂν καλέσωμεν N τὸ πλῆθος τῶν μηδενιζόντων σημείων τοῦ παρονομαστοῦ, τότε $N\leq m$.

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων λαμβάνομεν:

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k} Q(z) \qquad (4)$$

Τὰ σημεῖα z_k εἶναι πόλοι τῆς συναρτήσεως $Q(z)$. Ἐὰν ὁ πόλος z_k εἶναι a_k-τάξεως, τότε θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστόν:

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(a_k-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{a_k-1}}{dz^{a_k-1}}\left[(z-z_k)^{a_k} Q(z)\right] \qquad (5)$$

Παράδειγμα: Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a\,\sigma\upsilon\nu\theta},\quad |a|<1.$$

Λύσις: Θέτομεν $z=e^{i\theta}$, ὅτε λαμβάνομεν:

$$I=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{1+\frac{a}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{az^2+2z+a}$$

Οἱ μηδενίζοντες τὸν παρονομαστὴν εἶναι $z_{1,2}=-\frac{1}{a}\pm\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἰδιά-

ζοντα σημεία τῆς ὁλοκληρωτέας συναρτήσεως $f(z)=\frac{1}{az^2+2z+a}$. Ταῦτα εἶναι πόλοι πρώτης τάξεως τῆς $f(z)$. Ἐπειδὴ $z_1 \cdot z_2 = 1$ μόνον ἕνας ἐκ τῶν πόλων αὐτῶν εὑρίσκεται ἐντός τοῦ κύκλου $|z|=1$ καί ὡς εὐκόλως δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν εἶναι τό σημεῖον $z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$. Ὅθεν, συμφώνως πρός τό θεώρημα VIII-2-1, ἔχομεν:

$$I = \frac{2}{i} \cdot 4\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{az^2+2z+a} = 4\pi \left. \frac{1}{a(z-z_2)} \right|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} .$$

II. <u>Ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς</u>: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

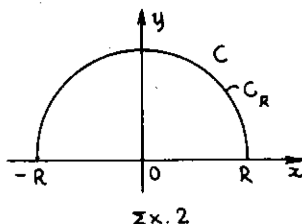
Θά ἐφαρμόσωμεν τήν θεωρίαν τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων διά τόν ὑπολογισμόν γενικευμένων ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (α' εἴδους).

Θά θεωρήσωμεν τήν περίπτωσιν, ὅπου ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς ὁλόκληρον τόν πραγματικόν ἄξονα καί δύναται νά ἐπιτευχθῆ ἡ ἀναλυτική της ἐπέκτασις ἐντός τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου (δηλ. τοῦ $\Im m z \geq 0$) καί ἐπί πλέον νά πληροῦνται ὡρισμέναι συμπληρωματικαί συνθῆκαι διά τήν $f(z)$. Δέν θά ἐπεκταθῶμεν εἰς τήν θεωρητικήν ἐξέτασιν τοῦ θέματος, ἀλλά ἀπό τό παράδειγμα πού θά ἐκθέσωμεν, ὁ ἀναγνώστης θά ἀντιληφθῆ περίπου τήν ἐφαρμοζομένην μέθοδον διά τόν ὑπολογισμόν τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ ἀνωτέρω τύπου.

<u>Παράδειγμα</u>:

Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

<u>Λύσις</u>: Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$. Αὐτη εἰς τό ἄνω μέρος τοῦ ἡμιεπιπέδου, δηλ. τό $\Im m z \geq 0$, ἔχει τά σημεία $z_k = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}$ $(k=0,1)$ ἀμφότερα ἁπλούς πόλους. Ἐν συνεχεία θεωροῦμεν, ὅπως καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα, τήν καμπύλην c (βλ. Σχ. 2) ἀποτελουμένην ἀπό τό διάστημα $-R \leq x \leq R$ καί ἀπό τήν ἡμιπεριφέρειαν C_R ἀκτῖνος R τοιαύτης, ὥστε οἱ ἀνωτέρω πόλοι νά εὑρίσκονται ἐντός τῆς c. Ἡ περιφέρεια c διαγράφεται κατά τήν θετικήν φοράν καί κατά τό θεώρημα VIII-2-1 τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων θά ἔχωμεν:



Σχ. 2

$$I = \int_c f(z)\,dz = 2\pi i \left\{ \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) \right\} \qquad (1)$$

Εἶναι δέ, $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{\frac{3i\pi}{4}}}$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{4z^3}\Bigg|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{\frac{9i\pi}{4}}}$$

Ὅθεν, $\displaystyle I = 2\pi i\left(\frac{1}{4e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9i\pi}{4}}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ (2)

Ἐξ ἄλλου: $\displaystyle I = \int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^4} + \int_0^{\pi}\frac{R\cdot i\cdot e^{i\theta}d\theta}{R^4e^{4i\theta}+1}$ (3)

Εἶναι δέ $\displaystyle \left|\int_0^{\pi}\frac{R\cdot i\cdot e^{i\theta}d\theta}{R^4e^{4i\theta}+1}\right| \leq \int_0^{\pi}\frac{Rd\theta}{R^4-1} = \frac{\pi\cdot R}{R^4-1} \longrightarrow 0$ τοῦ $R\uparrow\infty$ (4)

Ἡ (1), λόγω τῶν (3) καί (2), γράφεται:

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^4} + i\cdot\int_0^{\pi}\frac{R\cdot e^{i\theta}d\theta}{R^4e^{4i\theta}+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \qquad (5)$$

Τοῦ $R\uparrow\infty$, λόγω τῆς (4), ἡ (5) δίδει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \qquad (6)$$

Ἐπειδή $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = 2\cdot\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}$ θά ἔχωμεν:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

III. Ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς: $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\text{συν}\,\lambda x dx$ ἤ $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\text{ημ}\,\lambda x dx$.

Προκειμένου νά ὑπολογίσωμεν ὁλοκληρώματα τοῦ ἀνωτέρω τύπου, κρίνομεν ἀναγκαῖον νά παραθέσωμεν τό κάτωθι Λῆμμα τοῦ Jordan.

Λῆμμα VIII-3-1. Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής παντοῦ εἰς τό ἄνω μέρος τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου (δηλ. $\Im m\, z \geq 0$) καί ἐάν $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ διά $z = Re^{i\theta}$, ὅπου $k>0$ καί M εἶναι σταθερά, τότε θά ἔχωμεν:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{imz}\cdot f(z)dz = 0$$

ὅπου C_R εἶναι τό ἡμικύκλιον (0,R) τό εὑρισκόμενον εἰς τό θεωρηθέν ἡμιεπίπεδον καί m θετική σταθερά.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον τό z κινεῖται ἐπί τῆς θεωρηθείσης ἡμιπεριφερείας, θά ἔχωμεν: $z = Re^{i\theta}$, ὅτε θά εἶναι:

$$\int_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\cdot i\cdot R\cdot e^{i\theta}\,d\theta \quad \text{καί}$$

$$\left|\int_0^{\pi} e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\cdot i\cdot R\cdot e^{i\theta}\,d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\cdot i\cdot Re^{i\theta}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left|e^{imR\,\text{συν}\theta - mR\,\text{ημ}\theta}\cdot f(Re^{i\theta})\cdot i\cdot R e^{i\theta}\right| d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-mR\,\text{συν}\theta} \left| f(Re^{i\theta})\right| R\,d\theta$$

$$\le \frac{M}{R^{k-1}}\cdot \int_0^{\pi} e^{-mR\,\text{ημ}\theta}\,d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\,\text{ημ}\theta}\cdot d\theta .$$

Λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν καί τήν γνωστήν ἀνισότητα τοῦ Jordan, ἤτοι: $\frac{2\theta}{\pi} \le \text{ημ}\,\theta \le \theta$ διά $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, τότε τό τελευταῖον ὁλοκλήρωμα εἶναι μικρότερον ἤ ἴσον ἀπό τό ὁλοκλήρωμα:

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}\,d\theta = \frac{\pi M}{mR^{k}}\,(1-e^{-mR})$$

Ὅθεν,

$$\left|\int_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi\cdot M}{mR^{k}}\,(1-e^{-mR})$$

Τοῦ $R \to \infty$ καί ἐπειδή τά m καί k εἶναι θετικοί, ἕπεται ὅτι $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0$.

Παράδειγμα 1ον

Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\int_0^{\infty} \frac{\text{συν}\lambda x}{1+x^2}\,dx,\ \lambda \ge 0$.

Λύσις: Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $f(z) = \frac{e^{\lambda i z}}{1+z^2}$, $\lambda \ge 0$ καί τήν καμπύλην C (ὅπως δεικνύεται εἰς τό Σχ. 1) ἀποτελουμένη ἀπό τό τμῆμα $-R \le x \le +R$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος καί ἀπό τήν ἡμιπεριφέρειαν C_R μέ ἀκτῖνα $R>1$ εὑρισκομένη εἰς τό ἄνω μέρος τοῦ ἡμιεπιπέδου καί διαγραφομένη κατά τήν θετικήν φοράν. Ὁ μόνος πόλος τῆς συναρτήσεως $f(z)$ ἐντός τῆς ἀνωτέ-

Σχ. 1

ρω καμπύλης C εἶναι τό σημεῖον $z=i$.

Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα VIII-2-1 τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων εὑρίσκομεν:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \qquad (1)$$

Εἶναι δέ, $\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{e^{-\lambda}}{2i}$. Τό πρῶτον μέλος τῆς (1) γράφεται:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{\lambda i z}}{1+z^2}\,dz = \pi e^{-\lambda} \qquad (2)$$

Εἶναι δέ διά τά σημεῖα τῆς ἡμιπεριφερείας C_R, $z = Re^{i\theta}$ καί ὡς ἐκ τούτου:

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| = \frac{1}{|1+R^2e^{i\theta}|} \leq \frac{1}{R^2}.$$

Ἐφαρμόζοντες λοιπόν τό Λῆμμα VIII-3-1 θά ἔχωμεν: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{\lambda i z}}{1+z^2}dz=0$ (3)

Ἡ (2) λοιπόν, λόγω τῆς (3), δίδει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu\lambda x}{1+x^2}\,dx = \pi\cdot e^{-\lambda} \qquad (4)$$

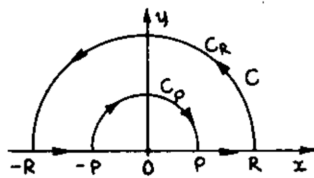
Ἐπειδή $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu\lambda x}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\lambda x}{1+x^2}\,dx$, ἡ (4) δίδει:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu\lambda x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\pi e^{-\lambda}$$

<u>Παρατήρησις</u>: Διά $\lambda=0$ ἔχομεν $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

2ον/. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\eta\mu x}{x}\,dx$.

<u>Λύσις</u>: Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Θά θεωρήσωμεν ὡς γραμμήν ὁλοκληρώσεως τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως τήν καμπύλην C τήν δεικνυομένην εἰς τό Σχ. 2 καί διαγραφομένην κατά τήν φοράν πού δεικνύουν τά βέλη. Οὕτως ἀκολουθοῦντες αὐτόν τόν δρόμον ὁλοκληρώσεως ἔχομεν ἐξαιρέσει τό σημεῖον $z=0$ πού εἶναι πόλος τῆς $f(z)$. Αἱ ἡμιπεριφέρειαι C_R καί C_ρ τῆς θεωρηθείσης περιμέτρου ἔχουν ἀκτῖνας R καί ρ



Σχ. 2

ἀντιστοίχως. Ἡ $f(z)$ ἐντός τῆς περιμέτρου C εἶναι ἀναλυτική καί ὡς ἐκ τούτου συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ Cauchy, θά ἔχωμεν:

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\rho}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 \qquad (1)$$

Ἤδη ὑποθέτομεν, ὅτι τό $\rho \to 0$ καί τό $R \to \infty$, ὅτε ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 \qquad (2)$$

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἤδη τά ὅρια τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν ἐμφανιζομένων εἰς τήν σχέσιν (2). Πρός τούτοις ἔχομεν:

$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{R}e^{-i\theta}\right| = \frac{1}{R}$. Ἑπομένως, συμφώνως πρός τό Λῆμμα VIII-3-1, θά ἔχωμεν: $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$.

Ἀπομένει νά ὑπολογίσωμεν τό: $\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$

Ἡ σειρά τοῦ Laurent τῆς συναρτήσεως $\frac{e^{iz}}{z}$ εἰς τό $z=0$ εἶναι:

$\frac{e^{iz}}{z} = \dfrac{1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdots}{z} = \frac{1}{z} + P(z)$, ὅπου $P(z)$ εἶναι τό κανονικόν μέρος τοῦ ἀναπτύγματος καί τό ὁποῖον εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις εἰς τό $z=0$.

Ὅθεν, $\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{dz}{z} + \lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}P(z)\,dz$.

Ἐπειδή $|P(z)| \leq M$ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $z=0$, θά ἔχωμεν:

$$\left|\int_{C_\rho}P(z)dz\right| \leq M\cdot\pi\rho \to 0 \text{ τοῦ } \rho\to 0.$$

Ὅθεν,
$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{dz}{z}.$$

Εἶναι δέ $\int_{C_\rho}\frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{0}\frac{i\rho\cdot e^{i\theta}d\theta}{\rho\cdot e^{i\theta}} = -\pi i$, συνεπῶς καί $\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{dz}{z} = -\pi i$.

Η (2) λοιπόν μετά τάς ἀντικαταστάσεις γράφεται:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \pi i + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = 0 \quad (3) \qquad \text{ἤ}$$

Ἐπειδή $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$, ἡ (3) δίδει τελικῶς:

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{\eta\mu x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

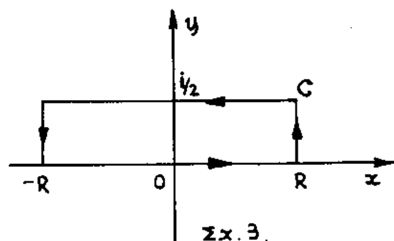
<u>Παρατήρησις</u>: Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται, ὅτι τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\eta\mu \lambda x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \; \lambda > 0.$$

3ον/. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sigma\upsilon\nu x\, dx.$

<u>Λύσις</u>: Παρατηροῦμεν ὅτι: $e^{-x^2}\sigma\upsilon\nu x = e^{-\frac{1}{4}} \cdot Re\, e^{-(x+\frac{i}{2})^2}$.

Θεωροῦμεν τό ὁλοκλήρωμα $\displaystyle\int_C e^{-z^2}dz$, ὅπου C εἶναι τό σύνορον τοῦ ὀρθογωνίου $-R \leq x < R$, $0 \leq y \leq 1/2$ (βλ. Σχ.3)



Σχ.3.

Ἐπειδή ἡ $f(z) = e^{-z^2}$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τῆς C, θά ἔχωμεν:

$$\int_C e^{-z^2}dz = 0 \quad (1) \qquad \text{ἤ}$$

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{1/2} e^{-(R+iy)^2}\, i\,dy + \int_{R}^{-R} e^{-(x+\frac{1}{2}i)^2}dx + \int_{1/2}^{0} e^{-(-R+iy)^2}\, i\,dy = 0 \quad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\left| \int_{0}^{1/2} e^{-(R+iy)^2}\, i\,dy \right| \leq \frac{1}{2}\, e^{-(R^2-\frac{1}{4})} \longrightarrow 0, \text{ τοῦ } R \longrightarrow \infty \quad (3)$$

Ὁμοίως: $\displaystyle\left| \int_{1/2}^{0} e^{-(R+iy)^2} \cdot i\,dy \right| \leq \frac{1}{2}\, e^{-(R^2-\frac{1}{4})} \longrightarrow 0$, τοῦ $R \longrightarrow \infty$ (4)

Τοῦ $R \to \infty$, λόγῳ τῶν (3) καί (4), ἡ (2) δίδει:

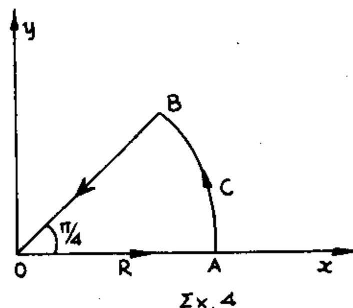
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{1}{2}i)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \quad (5)$$

Τό ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (5) ὡς γνωστόν ἰσοῦται πρός $\sqrt{\pi}$.
Ὅθεν ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \text{συν} x\, dx = e^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{1/4} \sqrt{\pi}.$$

4ον/. Δείξατε ὅτι $\int_0^{\infty} \text{ημ} x^2 dx = \int_0^{\infty} \text{συν} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (Ὁλοκλήρωμα Fresnel).

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἔστω C ὅτι εἶναι ἡ περίμετρος (βλ. Σχ. 4) ἡ ἀποτελουμένη ἀπό τό τόξον $\overset{\frown}{AB}$ κέντρου O καί ἀκτῖνος R καί τάς ἀκτίνας OA καί OB.



Σχ. 4

Τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $f(z) = e^{iz^2}$ κατά μῆκος τῆς C εἶναι μηδέν, ἤτοι: $\int_C e^{iz^2} dz = 0$ (1) ἤ

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{\overset{\frown}{AB}} e^{iz^2} dz + \int_{\overrightarrow{BO}} e^{iz^2} dz = 0 \quad (2)$$

Εἶναι δέ, $z = Re^{i\theta}$, ὅπου $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ καί οὕτω ἡ σχέσις (2) γράφεται :

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta + \int_R^0 e^{i\tau^2 e^{\frac{\pi i}{2}}} e^{\frac{\pi i}{4}} d\tau = 0 \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$\int_0^R (\text{συν} x^2 + i\,\text{ημ} x^2)\, dx = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^R e^{-\tau^2} d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \text{συν} 2\theta - R^2 \text{ημ} 2\theta}\, i \cdot R \cdot e^{i\theta} d\theta \quad (4)$$

Ἤδη ὑποθέτομεν ὅτι $R \to \infty$. Τότε τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιοῦ μέλους γίνεται :

$$e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἄλλου ὁλοκληρώματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (4) εἶναι:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 \text{συν} 2\theta - R^2 \text{ημ} 2\theta}\, i \cdot R \cdot e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \text{ημ} 2\theta} \cdot R d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \text{ημ}\varphi} d\varphi \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2})$$

(διότι, $\text{ημ}\varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$)

Ἐπειδή τό θεωρηθέν ὁλοκλήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (4) εἶναι ἀπολύτως μι-

κρότερον ἢ ἴσον τῆς $\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})$, ἡ ὁποία τείνει πρός τό μηδέν τοῦ $R\uparrow\infty$, ἔπεται ὅτι καί τοῦτο τείνει πρός τό μηδέν, τοῦ $R\uparrow\infty$.

Λαμβάνοντες λοιπόν τά ὅρια τῆς (4), τοῦ $R\uparrow\infty$, εὑρίσκομεν:

$$\int_0^\infty(\sigma\upsilon\nu x^2+i\eta\mu x^2)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{ἤ}$$

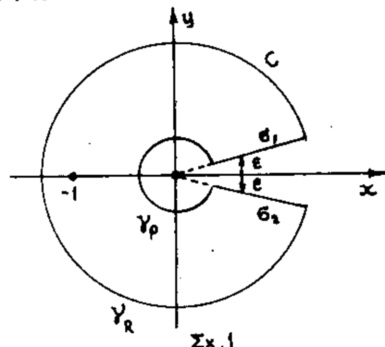
$$\int_0^\infty \sigma\upsilon\nu x^2 dx=\int_0^\infty \eta\mu x^2 dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

IV. Ἡ περίπτωσις τῶν πλειοτίμων συναρτήσεων.

Εἰς τάς προηγουμένας περιπτώσεις ἐθεωρήσαμεν μονοτίμους ἀναλυτικάς συναρτήσεις καί ἐφαρμόσαμεν τά θεωρήματα τοῦ Cauchy διά τόν ὑπολογισμόν γενικευμένων ὁλοκληρωμάτων. Ἤτοι αἱ ἀνωτέρω μέθοδοι ἐφηρμόσθησαν μόνον ὅταν ἡ ἀναλυτική ἐπέκτασις $f(z)$ τῆς συναρτήσεως $f(x)$ ἀπό τόν πραγματικόν ἄξονα ἐντός ἑνός πεδίου φρασσομένου ὑπό μιᾶς περιμέτρου τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι μία μονότιμος ἀναλυτική συνάρτησις.

Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν πού θεωροῦμεν τώρα, ἡ πλήρης ἀναλυτική συνάρτησις $F(z)$ εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις εἰς τό ἐπεκτεταμένον μιγαδικόν ἐπίπεδον, ἡ δέ περίμετρος τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νά ἐκλεγῆ εἰς τρόπον, ὥστε νά μήν ὑπάρχουν κλαδικά σημεῖα τῆς $F(z)$ ἐντός αὐτῆς καί οὕτω ἔχομεν νά θεωρήσωμεν μόνον ἕναν κλάδον $f(z)$ τῆς πλήρους ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $F(z)$, ἥτις εἶναι μία κατ' εὐθεῖαν ἀναλυτική ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως $f(x)$ ἐντός τοῦ μιγαδικοῦ πεδίου. Βάσει τῆς ἀνωτέρω μεθόδου ὑπολογίζονται διάφορα ὁλοκληρώματα.

Παράδειγμα 1ον. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα: $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x}$, $0<p<1$



Λύσις: Ἔστω ὅτι C εἶναι ἡ περίμετρος, ὡς δεικνύεται εἰς τό Σχ.1, ἀποτελουμένη ἀπό τά τόξα γ_ρ καί γ_R τῶν κύκλων $|z|=\rho$ καί $|z|=R$ ἀντιστοίχως καί ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα σ_1 καί σ_2 τῶν ἀκτίνων $\arg z=\varepsilon$ καί $\arg z=2\pi-\varepsilon$. Ἔστω δέ καί ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{z^{p-1}}{1+z}=\frac{e^{(p-1)\log z}}{1+z}$, τήν ὁποίαν ἐκλέγομεν οὕτως, ὥστε ὁ $\log z$ νά εἶναι κλάδος τοῦ λογαρίθμου πού ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκην: $0\leq \mathcal{I}m\log z=\arg z<2\pi$. (1)

Ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι μονότιμος καί ἀναλυτική ἐντός τῆς περιμέτρου C ἐκτός τοῦ σημείου $z=-1$ πού εἶναι ἁπλός πόλος.

Εἶναι δέ, $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = \left[\dfrac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)'}\right]_{z=-1} = e^{(p-1)\log(-1)} = e^{(p-1)\pi i} = -e^{p\pi i}$.

Ὅθεν,

$$\int_C \frac{z^{p-1}dz}{1+z} = -e^{p\pi i} \qquad (2) \qquad \text{ἤ}$$

$$\int_{\sigma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\sigma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = -2\pi i e^{p\pi i} \qquad (3)$$

Εἶναι δέ:

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^{p-1}dz}{1+z}\right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|z^{p-1}|dz}{|1+z|} \le \frac{R^{p-1}}{R-1}\cdot(2\pi-2\varepsilon)R, \text{ ὅπου } z\in\gamma_R,\ R>1 \qquad (4)$$

$$\left|\int_{\gamma_\rho} \frac{z^{p-1}dz}{1+z}\right| \le \int_{\gamma_\rho} \frac{|z^{p-1}|dz}{|1+z|} \le \frac{\rho^{p-1}}{1-\rho}\cdot(2\pi-2\varepsilon)\rho, \text{ ὅπου } z\in\gamma_\rho,\ \rho<1 \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν (4) καί (5) συνάγομεν ὅτι:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_R}\frac{z^{p-1}dz}{1+z} = 0 \qquad (6)$$

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\rho}\frac{z^{p-1}dz}{1+z} = 0 \qquad (7)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐάν εἰς τήν σχέσιν (3) θέσωμεν $z=re^{i\theta}$, αὐτη γράφεται:

$$\int_\rho^R f(re^{i\varepsilon})\,d(re^{i\varepsilon}) + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_R^\rho f(re^{i(2\pi-\varepsilon)})\,d(re^{i(2\pi-\varepsilon)}) + \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = -2\pi i e^{p\pi i} \qquad (8) \qquad \text{ἤ}$$

$$e^{i\varepsilon}\int_\rho^R \frac{r^{p-1}e^{i(p-1)}}{1+re^{i\varepsilon}}\,dr + \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz - e^{i(2\pi-\varepsilon)}\int_\rho^R \frac{r^{p-1}\cdot e^{i(p-1)(2\pi-\varepsilon)}}{1+re^{i(2\pi-\varepsilon)}}\,dr +$$

$$+\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = e^{i\varepsilon+i(p-1)\varepsilon}\int_\rho^R \frac{r^{p-1}dr}{1+re^{i\varepsilon}} + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz -$$

$$-e^{-i\varepsilon-i(p-1)\varepsilon}\cdot e^{-2(p-1)\pi i}\int_\rho^R \frac{r^{p-1}dr}{1+re^{-i\varepsilon}} + \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = -2\pi i e^{p\pi i} \qquad (9)$$

Ὑποθέτοντες ἤδη ὅτι $R\to\infty$ καί $\rho\to 0$ καί λαμβάνοντας ὑπ᾽ ὄψιν τάς (6,

καί (7) ἐκ τῆς (9) λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{p-1}d\tau}{1+\tau} - e^{2(p-1)\pi i}\int_0^\infty \frac{\tau^{p-1}d\tau}{1+\tau} = -2\pi i e^{p\pi i} \qquad (10) \qquad \text{ἤ}$$

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{p-1}d\tau}{1+\tau} = -2\pi i \frac{e^{p\pi i}}{1-e^{2(p-1)\pi i}} \qquad (11)$$

Εἶναι δέ, $-2\pi i \dfrac{e^{p\pi i}}{1-e^{2(p-1)\pi i}} = 2\pi i \dfrac{1}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}} = \dfrac{\pi}{\eta\mu p\pi}$

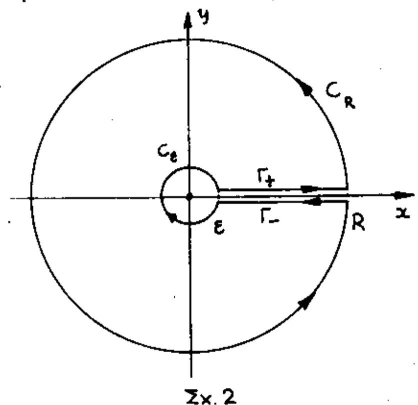
Ἡ (11) τελικῶς γράφεται θέτοντας ἀντί τ τό x:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\eta\mu p\pi} \qquad (0<p<1).$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1η/ Γενικῶς μέ τήν ἀνωτέρω μέθοδον δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς: $\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx$ $(0<p<1)$, φυσικά πληρουμένων ὡρισμένων ὑποθέσεων διά τήν $f(x)$.

2α/ Ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς: $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}f(x)\,dx$, $0<p<1$ ἀνάγονται εἰς ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς: $\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx$, ἐάν εἰς τό πρῶτον ἐκτελέσωμεν τήν ἀντικατάστασιν $y=\dfrac{x}{1-x}$.

3η/ Ἡ μέθοδος πού ἀκολουθήσαμεν εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα παρουσιάζει τό μειονέκτημα ὅτι ἐμφανίζονται ἀρκεταί πράξεις. Εἰς τό παράδειγμα πού ἀκολουθεῖ θά ἴδωμεν μίαν ἄλλην ταχεῖαν μέθοδον ὑπολογισμοῦ ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς $\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx$.



Σχ. 2

<u>Παράδειγμα 2ον</u>/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^\infty \dfrac{x^{1/2}dx}{1+x^2}$

<u>Λύσις</u>: θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν:

$$f(z)=\frac{z^{1/2}}{1+z^2},\quad 0<\arg z<2\pi.$$

ἡ ὁποία ἔχει ἕνα κλαδικόν σημεῖον, τό $z=1$, κατά μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x. Θεωροῦν-

τες δέ καί τήν περίμετρον C διαγραφομένην, ὅπως ἀκριβῶς δεικνύεται εἰς τό Σχ. 2, δηλ. ἡ C ἀποτελεῖται: ἀπό τόν κύκλον:

$$C_R: \; z = Re^{i\theta}, \; 0 < \theta < 2\pi$$

τό εὐθύγραμμον τμῆμα:

$$\Gamma_-: \; \arg z = 2\pi, \; \varepsilon < |z| < R$$

τόν κύκλον:

$$C_\varepsilon: \; z = \varepsilon \cdot e^{i\theta}, \; 0 < \theta < 2\pi$$

καί τό εὐθύγραμμον τμῆμα:

$$\Gamma_+: \; \arg z = 0, \; \varepsilon < |z| < R.$$

Ἡ $f(z) = \frac{z^{1/2}}{1+z^2}$ ἐντός τοῦ πεδίου τοῦ ὁριζομένου ὑπό τῆς ἀνωτέρω περιμέτρου ἔχει δύο πόλους τούς $z = \pm i$ καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων λαμβάνομεν:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \left\{ \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{e^{\pi i/4}}{2i} + \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{-2i} \right\} = \pi\sqrt{2}. \qquad (1)$$

Ἀκολούθως ὁρίζομεν τήν $f(z)$ ἐπί τοῦ Γ_+ ὡς τό ὅριον τῆς $f(re^{i\theta})$ καθώς τό $\theta \to 0$ καί ἐπί τοῦ Γ_- ὡς τό ὅριον τῆς $f(re^{i\theta})$ καθώς τό $\theta \to 2\pi$. Τότε θά ἔχωμεν: $f(z) = \frac{x^{1/2}}{1+x^2}$ ἐπί τοῦ Γ_+ καί $f(z) = -\frac{x^{1/2}}{1+x^2}$ ἐπί τοῦ Γ_-.

Ἡ σχέσις (1) γράφεται ἀκολούθως:

$$\int_{C_R} f(\zeta)d\zeta + \int_{\Gamma_-} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(\zeta)d\zeta + \int_{\Gamma_+} f(z)dz = \pi\sqrt{2} \qquad (2) \qquad \text{ἤ}$$

Ἡ σχέσις (2) γράφεται, ἐάν λάβωμεν τά ὅρια τοῦ $\theta \to 0$ καί $\theta \to 2\pi -$ ὅτε τά τμήματα Γ_+ καί Γ_- θά κεῖνται ἐπί τοῦ ἄξονος $ox -$, οὕτω:

$$\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta + \int_R^\varepsilon -\frac{x^{1/2}dx}{1+x^2} + \int_{2\pi}^0 f(\varepsilon \cdot e^{i\theta}) \, \varepsilon \cdot i e^{i\theta} d\theta + \int_\varepsilon^R \frac{x^{1/2}}{1+x^2} dx = \pi\sqrt{2} \qquad (3).$$

Εἶναι δέ:

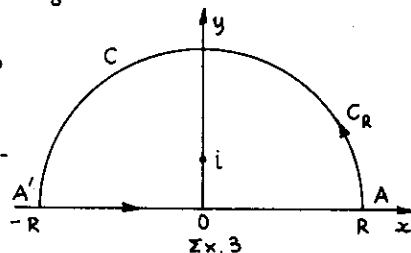
$$R \cdot \max_{|\zeta|=R} |f(\zeta)| \to 0 \text{ τοῦ } R \uparrow \infty$$

$$\varepsilon \max_{|\zeta|=\varepsilon} |f(\zeta)| \to 0 \text{ τοῦ } \varepsilon \to 0$$

Λαμβάνοντες λοιπόν τά ὅρια τῆς (3) τοῦ $R \uparrow \infty$ καί $\varepsilon \to 0$ θά ἔχωμεν:

$$2\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2} dx = \pi\sqrt{2} \quad (4) \qquad \text{ἤ} \qquad \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Παράδειγμα 3ον/ Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx$



Λύσις: Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $f(z)=\frac{\log(z+i)}{z^2+1}$, ὅπου $-\pi<\Im m \log(z+i)=\arg(z+i)\leq\pi$ ἤ $-\pi<\arg z+\frac{\pi}{2}\leq\pi$ ἤ $\frac{-3\pi}{2}<\arg z\leq\frac{\pi}{2}$ καί τήν περίμετρον C ἀποτελουμένη ἀπό τό τμῆμα A'A τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος καί τήν ἡμιπεριφέρεια C_R ἀκτῖνος R (βλ. Σχ. 3).

Ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{\log(z+i)}{z^2+1}$ ἐντός τῆς ἐν λόγω περιμέτρου ἔχει τό σημεῖον $z=i$ ἁπλοῦν πόλον.

Ὡς γνωστόν θά ἔχωμεν:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \quad \text{ἤ}$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx \quad \int_{C_R}\frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}f(z) \qquad (1)$$

Εἶναι δέ, $2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)=2\pi i\,\frac{\log(2i)}{2i}=\pi\log 2+\frac{1}{2}\pi^2 i.$

Ἡ (1) λοιπόν γράφεται:

$$\int_{-R}^{0}\frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx+\int_0^R\frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx+\int_{C_R}\frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz=\pi\log 2+\frac{1}{2}\pi^2 i \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες τό x ὑπό τοῦ −x εἰς τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα τῆς (2), αὕτη γράφεται:

$$\int_0^R\frac{\log(i-x)}{x^2+1}dx+\int_0^R\frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx+\int_{C_R}\frac{\log(z+i)\,dz}{z^2+1}=\pi\log 2+\frac{1}{2}\pi^2 i \quad (3) \quad \text{ἤ}$$

ἐπειδή $\log(i-x)+\log(i+x)=\log(i^2-x^2)=\log(-1)+\log(1+x^2)=\pi i+\log(1+x^2)$, ἡ (3) γράφεται:

$$\int_0^R\frac{\log(x^2+1)\,dx}{x^2+1}+\int_0^R\frac{\pi i}{x^2+1}dx+\int_{C_R}\frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz=\pi\log 2+\frac{1}{2}\pi^2 i \quad (4)$$

Εἶναι δέ: $|\log(z+i)|=\left|\log|z+i|+i\arg(z+i)\right|$

$$\leq\sqrt{\log^2(R+1)+(\theta+\tfrac{\pi}{2})^2}\leq 2\log(R+1),\ \text{δι' ἀρκούντως μεγάλο } R.$$

Συνεπῶς $\left| \int_{C_R} \frac{\log(\zeta+i)d\zeta}{\zeta^2+1} \right| \leq \pi \cdot R \cdot \frac{2\cdot \log(R+1)}{R^2-1} \longrightarrow 0, R\uparrow\infty$

Λαμβάνοντες λοιπόν τά ὅρια διά $R\uparrow\infty$ τῆς (4), εὑρίσκομεν:

$$\int_0^\infty \frac{\log(x^2+1)dx}{x^2+1} + \pi i \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \pi \log 2 + \frac{1}{2}\pi^2 i \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\int_0^\infty \frac{\log(x^2+1)dx}{x^2+1} = \pi \log 2 .$$

§ 4. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΝ ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΚΑΙ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΑΤΟΣ

Θεώρημα VIII-4-1. Δίδεται μία τμηματικῶς λεία κλειστή καμπύλη τοῦ Jordan C καί ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός καί ἐπί τῆς C ἐκτός διά ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν πόλων $a_1, a_2, \dots, a_n$ πολλαπλότητος $P_1, P_2, \dots, P_n$ ἀντιστοίχως. Ὑποθέτομεν ἐπίσης ὅτι ἐντός τῆς C ἡ $f(z)$ ἔχει τά μηδενίζοντα αὐτήν σημεῖα $b_1, b_2, \dots, b_k$ μέ ἀντιστοίχους πολλαπλότητας $q_1, q_2, \dots, q_k$. Τότε θά ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(\zeta)d\zeta}{f(\zeta)} = \sum_{j=1}^{k} q_j - \sum_{i=1}^{n} P_i = N - P,$$

ὅπου N ὁ ὁλικός ἀριθμός τῶν μηδενιζόντων σημείων καί P ὁ ὁλικός ἀριθμός τῶν πόλων τῆς $f(z)$.

Ἀπόδειξις: (Αη περίπτωσις). Ἔστω ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει ἐντός τῆς C τόν πόλον $z=a$ μέ πολαπλότητα p καί τό μηδενίζον σημεῖον $z=b$ μέ πολλαπλότητα q. Τότε διά τόν πόλον θά ἔχωμεν:

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^p} \qquad (1)$$

ὅπου ἡ $F(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τῆς C μέ $F(a) \neq 0$.

Εἶναι δέ,
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-a} \qquad (2)$$

Συνεπῶς:
$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p \qquad (3)$$

Διά τό μηδενίζον σημεῖον θά ἔχωμεν:

$$f(z) = (z-b)^q \cdot G(z) \qquad (4).$$

ὅπου ἡ $G(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τῆς C καὶ ἐπὶ πλέον $G(b) \neq 0$.

Εἶναι δέ,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{q}{z-b} + \frac{G'(z)}{G(z)} \qquad (5)$$

Συνεπῶς :

$$\operatorname*{Res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = q \qquad (6)$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ Θεωρήματος VIII-2-1 τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = q - P \qquad (7)$$

(<u>Β᾽ Γενικὴ Περίπτωσις</u>). Συμφώνως πρὸς τὴν ἐξετασθεῖσαν α᾽ περίπτωσιν ἐπειδὴ τὰ μόνα ἰδιάζοντα σημεῖα τῆς $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ἐντὸς τῆς C εἶναι οἱ πόλοι καὶ τὰ μηδενίζοντα σημεῖα μὲ τοὺς ἀντιστοίχους βαθμοὺς πολλαπλότητος, τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι πλέον μία ἄμεσος συνέπεια τοῦ Θεωρήματος VIII-2-1 τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων.

• Ἔστω N ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν μηδενιζόντων σημείων καὶ P ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν πόλων τῆς $f(z)$ κειμένων ἐντὸς τῆς C, ἑκάστου ἀριθμοῦ ὑπολογιζομένου ἴσου πρὸς τὴν τάξιν. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, θὰ ἔχωμεν :

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\log f(z)\,dz}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\Delta_C \log f(z) \qquad (8)$$

<u>ὅπου</u> $\Delta_C \log f(z)$ <u>παριστᾷ τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως</u> $\log f(z)$ <u>καθὼς τὸ σημεῖον</u> z <u>κάμνει μίαν ὁλόκληρον περιστροφὴν κινούμενον ἐπὶ τῆς</u> C.

Ὡς γνωστὸν $\log f(z) = \log|f(z)| + i\arg f(z)$ (9).

καὶ ἐπίσης εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $|f(z)|$ δὲν μεταβάλλεται καθὼς τὸ z κινεῖται διαγράφον τὴν C. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι :

$$\Delta_C \log f(z) = \Delta_C \left\{\log|f(z)| + i\arg f(z)\right\} = i\,\Delta_C \arg f(z) \qquad (10)$$

Ὅθεν, ἡ σχέσις (8), λόγῳ τῆς (10), γίνεται :

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\,\Delta_C \log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot i\cdot \Delta_C \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_C \arg f(z).$$

Ὥστε ,

$$\boxed{N - P = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_c \arg f(z)} \qquad (11)$$

Ἡ σχέσις (11) εἶναι σπουδαία καί καλεῖται ***ἀρχή τοῦ ὁρίσματος***.

Ἐκ τῶν (1) καί (4) λαμβάνομεν :

$$\boxed{\int_c \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = i\cdot \Delta_c \arg f(z)} \qquad (12)$$

§5. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROUCHE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΟΥ

Θεώρημα VII-5-1. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καί $g(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί ἐντός καί ἐπί μιᾶς τμηματικῶς λείας κλειστῆς καμπύλης C τοῦ Jordan καί ἐπί πλέον ὅτι $|f(z)|>|g(z)|$ εἰς κάθε σημεῖον τῆς C. Τότε αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καί $f(z)+g(z)$ ἔχουν τόν αὐτόν ἀριθμόν μηδενιζόντων σημείων ἐντός τῆς C.

Ἀπόδειξις: Λόγῳ τῆς σχέσεως $|f(z)|>|g(z)|$, ἕπεται ὅτι ἡ $f(z)$ δέν μηδενίζεται ἐπί τῆς καμπύλης C καί ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν:

$$\Delta_c \arg\left[f(z)+g(z)\right] = \Delta_c \arg\left\{f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]\right\} = \Delta_c \arg f(z) + \Delta_c \arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right] \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως, $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$ διά κάθε $z\in C$ καί ὡς ἐκ τούτου τό μεταβλητόν σημεῖον W ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ:

$$W = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}, \quad z\in C \qquad (2)$$

διαγράφει μίαν καμπύλην Γ κειμένη ἐντός τοῦ κύκλου $|W-1|=1$. Ὅθεν, τό σημεῖον $W=0$ δέν ἐγκλείεται ὑπό τῆς καμπύλης Γ, διότι πάντα τά σημεῖα τῆς Γ πληροῦν τήν σχέσιν $|W-1|<1$, ἐνῶ τό $W=0$ πληροῖ τήν σχέσιν $|0-1|=1$. Ἤδη ἄς ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (12) τῆς § 4 διά τήν συνάρτησιν $f(w)=W$, ὅτε θά ἔχωμεν:

$$\int_c \frac{W'}{W}\,dw = i\,\Delta_c \arg w \quad (3)$$

Ἐπειδή τό ἀριστερόν μέλος τῆς (3) εἶναι μηδέν – τό $W=0$ κεῖται ἐ-

κλου της C_- θα έχωμεν:

$$i\Delta_c \arg w = 0 \quad \text{ή}$$

$$\Delta_c \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] = 0 \qquad (4)$$

Ούτω, λόγω της (1), θα έχωμεν:

$$\Delta_c \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_c \arg f(z) \qquad (5)$$

Επειδή λόγω της υποθέσεως αι συναρτήσεις $f(z)$ και $f(z)+g(z)$ δεν έχουν πόλους εντός της C, συμφώνως προς την αρχήν του ορίσματος αι συναρτήσεις $f(z)$ και $f(z)+g(z)$ έχουν τον αυτόν αριθμόν μηδενιζόντων σημείων.

Εφαρμογαί: 1η Εφαρμόζοντες το Θεώρημα του Rouché να προσδιορισθή ο αριθμός των ριζών της εξισώσεως $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ των κειμένων εντός του κύκλου $|z| = 1$.

Λύσις: Θεωρούμεν τας συναρτήσεις $f(z) = -4z^3$ και $g(z) = z^7 + z - 1$. Παρατηρούμεν ότι όταν $|z| = 1$, τότε $|f(z)| = 4$, ενώ $|g(z)| \leq 3$. Συνεπώς $|f(z)| > |g(z)|$ διά τα z της περιφερείας $|z| = 1$. Ούτω δυνάμεθα να εφαρμόσωμεν το Θεώρημα του Rouché. Επειδή ο αριθμός των μηδενιζόντων σημείων την $f(z)$ εντός της $|z| = 1$ είναι 3 (ένας μηδενίζον 3-τάξεως) έπεται ότι και ο αριθμός των ριζών της συναρτήσεως $f(z) + g(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1$ εντός του κύκλου $|z| = 1$ είναι τρία.

2α/ **Θεώρημα** (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας)

Δείξατε ότι κάθε πολυώνυμον:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

βαθμού $n \geq 1$ έχει ακριβώς n-ρίζας.

Απόδειξις: Θεωρούμεν τας συναρτήσεις:

$$f(z) = z^n \quad \text{και} \quad g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

Έστω R ένας αριθμός μεγαλύτερος των αριθμών 1 και $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$. Επί του κύκλου $|z| = R$ έχομε: $|f(z)| = R^n$ και $|g(z)| \leq |a_1| R^{n-1} + |a_2| R^{n-2} + \cdots + |a_n| \leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|) R^{n-1} < R^n$

Είναι λοιπόν $|f(z)| > |g(z)|$, ήτοι επί της περιφερείας $|z| = R$ πληρούνται αι υποθέσεις του θεωρήματος του Rouché και ως εκ τούτου αι συναρτήσεις $f(z) = z^n$ και $f(z) + g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$ έχουν τον αυτόν αριθμόν ριζών εντός του $|z| = R$.

Ἡ $f(z)=z^n$ ἔχει n-τό πλῆθος ρίζας, ἄρα καί ἡ $f(z)+g(z)=P(z)=z^n+a_1 z^{n-1}+a_2 z^{n-2}+\cdots+a_n$ ἔχει n-τό πλῆθος ρίζας ἐντός τοῦ $|z|=R$.

Ἐπί πλέον ἡ $P(z)=f(z)+g(z)$ δέν ἔχει ρίζας ἐκτός τοῦ $|z|=R$ διότι, ἐάν $|z|\geq R$, θά ἔχωμεν τότε: $|z^n+g(z)|\geq |z|^n-|g(z)|>R^n-R^n=0$, ἤτοι: $|P(z)|>0$ διά $z\geq R$, ἄρα τό $P(z)$ δέν ἔχει ρίζας ἐκτός ἤ ἐπί τῆς $|z|=R$.

<u>Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:</u>

1. Νά εὑρεθοῦν τά ὁλοκληρωτικά ὑπόλοιπα (Residues) τῶν κάτωθι συναρτήσεων $f(z)$ εἰς πάντα τά (πεπερασμένα) μεμονωμένα ἰδιάζοντα σημεῖα αὐτῶν:

   i) $f(z)=\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2\cdot(z^2+4)}$ ii) $f(z)=\dfrac{\eta\mu 2z}{(z+1)^3}$ iii) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+16}$

   iv) $f(z)=\dfrac{e^z}{\eta\mu^2 z}$ v). $f(z)=\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ vi) $f(z)=\varepsilon\varphi\, z$

   vii) $f(z)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{z-2}$ viii) $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ ix) $f(z)=\eta\mu z\,\eta\mu\frac{1}{z}$.

2. Ὁμοίως τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

   i) $f(z)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$ ii) $f(z)=\dfrac{1}{z(1-e^{-nz})}$ $(n\neq 0)$ iii) $f(z)=z^2\eta\mu\dfrac{1}{z+1}$

   iv) $f(z)=\dfrac{1}{\eta\mu\frac{1}{z}}$ v) $f(z)=\dfrac{\varepsilon\varphi z}{z^n}$ vi) $f(z)=e^{1/z^2}\sigma\upsilon\nu\, z$.

3. Νά ὑπολογισθῆ τό ὁλοκλήρωμα $\displaystyle\int_c \frac{z^3}{z^4-1}dz$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z|=2$.

4. Ὁμοίως τό $\displaystyle\int_c \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z-2|=\frac{1}{2}$.

5. Ὁμοίως τό $\displaystyle\int_c \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2-9)}$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z|=1$.

6. Ὁμοίως τό $\displaystyle\int_c z^n e^{\frac{2}{z}}dz$, (n: ἀκέραιος) ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z|=1$.

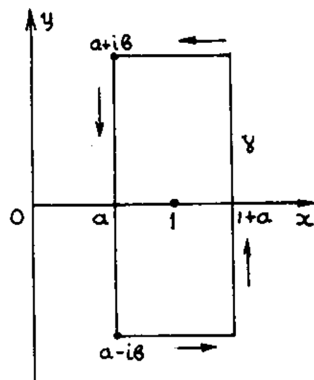
7. Ὁμοίως τό $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_c \eta\mu\frac{1}{z}dz$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z|=r$.

8. Ὁμοίως τό $\displaystyle\int_c \varepsilon\varphi\pi z\,dz$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z|=n$.

9. Ἔστω $f(z)=a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Δείξατε ὅτι: $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} z^{n-1}|f(z)|^2 dz = a_n \bar{a}_0 R^{2n}$.

10. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{a^z \eta\mu\pi z}$, $(a^z = e^{z\log a})$, ὅπου $a>0$ καί C εἶναι ἡ εὐθεία γραμμή $x=a$, $0<a<1$ ἐπεκτεινομένη πρός τά ἄνω.

Ὑπόδ: Θεωρήσατε τό ὁλοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{a^z \eta\mu\pi z}$, ὅπου γ εἶναι ἡ περίμετρος ἡ δεικνυομένη εἰς τό Σχ. 1 καί ἀκολούθως λάβετε τό ὅριον τοῦ $\beta \to \infty$.



Σχ. 1

11. Νά εὑρεθῇ τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον εἰς τό $z=1$ τοῦ κλάδου τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1-z}$ ἐπιτυγχανομένου διά τοῦ περιορισμοῦ τοῦ $\arg z$ εἰς τρόπον, ὥστε $(2n-1)\pi < \arg z < (2n+1)\pi$, ὅπου n ἀκέραιος.

(Ἀπαντ: $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = (-1)^{n+1}$).

12. Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ὁλοκληρώματα:

i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+\beta\,\sigma\upsilon\nu\varphi)^2}$ $(a>\beta>0)$ ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+\eta\mu^2\varphi}$ (Ἀπάντ: $\pi\sqrt{2}$)

iii) $\int_0^{2\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 3\varphi\, d\varphi}{1-2a\,\sigma\upsilon\nu\varphi + a^2}$ (a: μιγαδικός $\neq \pm 1$ iv) $\int_0^{\pi} \eta\mu^{2n}\varphi\, d\varphi$ (Ἀπάντ: $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$).

13. Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ὁλοκληρώματα:

i) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+2x^2)}$ ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ iii) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$, $0<m<n$.

14. Δείξατε ὅτι: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{4^n}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

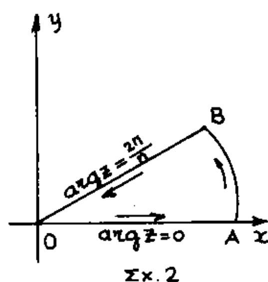
15. Χρησιμοποιοῦντες τὴν περίμετρον τὴν δεικνυομένην εἰς τὸ Σχ. 2 τῆς § 3 ὑπὸ § III δείξατε ὅτι: $\int_0^\infty \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

16. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα:

i) $\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu x\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a>0, b>0$ ii) $\int_0^\infty \frac{x\eta\mu x\, dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$.

17. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$, $n \geq 2$ φυσικὸς ἀριθμός.

Ὑπόδ: θεωρήσατε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{dz}{1+z^n}$, ὅπου C εἶναι ἡ περίμετρος ἀποτελουμένη ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας $\arg z=0$ καὶ $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ καὶ ἕνα κυκλικὸν τόξον AB (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2

18. Διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ Λήμματος τοῦ Jordan νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα:

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sigma\upsilon\nu x\, dx}{x^2-2x+10}$ ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\eta\mu x\, dx}{x^2-2x+10}$ iii) $\int_0^\infty \frac{x\eta\mu a x}{x^2+b^2}dx$ $(a>0, b>0)$

19. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα:

i) $\int_0^\infty \frac{\eta\mu a x\, dx}{x(x^2+b^2)}$ ii) $\int_0^\infty \frac{\sigma\upsilon\nu 2ax - \sigma\upsilon\nu 2bx}{x^2}dx$ iii) $\int_0^\infty \frac{\eta\mu^2}{x^2}dx$

Ὑπόδ: Χρησιμοποιήσατε διὰ τ' ἀνωτέρω ὁλοκληρώματα τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{e^{2iz}-1}{z^2}dz$, ὅπου C εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ Σχ. 2 τῆς § 3 τῆς ὑπό-§ III.

20. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα (τῶν πλειοτίμων συναρτήσεων):

i) $\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2}dx$ ii) $\int_0^\infty \frac{x^2\log x}{(1+x^2)^2}dx$ iii) $\int_0^\infty \frac{x^a dx}{1+x^2}$ $(-1<a<1)$

21. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Ὑπόδ: Πρὸς τούτοις θεωρήσατε τὴν συνάρτησιν

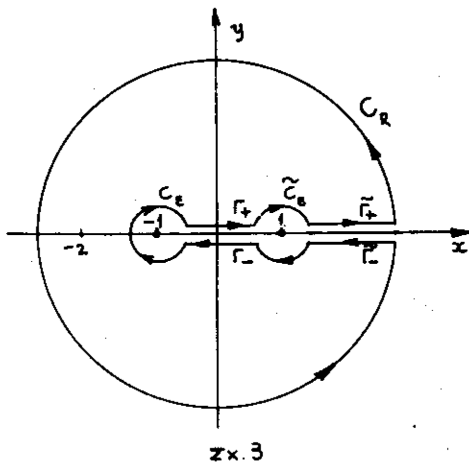
$$f(z)=\frac{1}{(z+2)\sqrt{z^2-1}}$$

Λάβατε τὸν κλάδον τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$0<\arg(z-1)<2\pi$$

καὶ $\quad 0<\arg(z+1)<2\pi$

Ἐν συνεχείᾳ ἐκτελέσατε τὴν ὁλοκλήρωσιν κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου τῆς δεικνυομένης εἰς τὸ Σχ. 3. Θὰ εἶναι



Σχ. 3

$\int_C f(z)dz=2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2} f(z)$. Ἀκολούθως ὑποθέσατε ὅτι, $R\to\infty$ καὶ $\varepsilon\to 0$ κ.τ.λ.

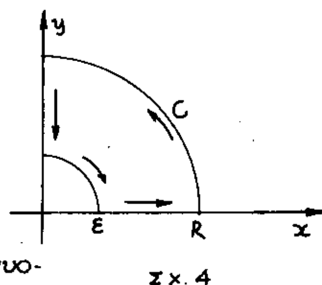
22. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

23. Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα, ὑποθέτοντες ὅτι $x^p>0$ διὰ $x>0$.

i) $\int_0^\infty x^{p-1}\,\text{συν}\,ax\,dx \quad (a>0,\ 0<p<1)$

ii) $\int_0^\infty x^{p-1}\,\text{ημ}\,ax\,dx \quad (a>0,\ -1<p<1)$

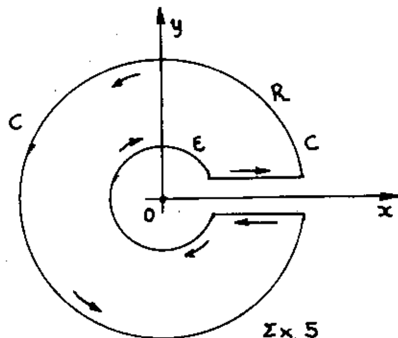
Ὑπόδ: Χρησιμοποιήσατε τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C z^{p-1}e^{-az}dz$, ὅπου C εἶναι ἡ περίμετρος ἡ δεικνυομένη εἰς τὸ Σχ. 4.



Σχ. 4

24. Ἔστω ὅτι ἡ ρητὴ συνάρτησις $f(z)$ ἔχουσα πόλους $a_1, a_2, \dots, a_n$ οὐδεὶς τῶν ὁποίων κεῖται ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος ἢ εἶναι μηδὲν καὶ ἔστω P ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε:

$$\lim_{z\to 0}\left[z^{P+1}f(z)\right]=\lim_{z\to\infty}\left[z^{P+1}f(z)\right]=0$$



Σχ. 5

Δείξατε ὅτι:

1) Ἐάν p δέν εἶναι ἀκέραιος, τότε:

$$\int_0^{\infty} x^p f(x)\,dx = -\frac{\pi}{\eta\mu\pi p}\; e^{-\pi p i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k}\left[z^p f(z)\right]$$

2) Ἐάν p εἶναι ἕνας ἀκέραιος, τότε:

$$\int_0^{\infty} x^p f(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k}\left[z^p \log z\, f(z)\right],$$

ὅπου $\log z = \log|z| + i\arg z,\ 0 \leq \arg z < 2\pi$.

Ὑπόδ: Θεωρήσατε ἀντιστοίχως τά ὁλοκληρώματα $\int_c z^p f(z)\,dz$ καί $\int_c z^p \log z\, f(z)\,dz$, ὅπου c εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ Σχ. 5.

25. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Rouché νά προσδιορισθῆ ὁ ἀριθμός τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

i) $z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$ ii) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$.

26. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Rouché νά προσδιορισθῆ ὁ ἀριθμός τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ εἰς τό χωρίον $1 \leq |z| < 2$.

27. Πόσαι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $e^z - 4z^n + 1 = 0$ εὑρίσκονται ἐντός τοῦ κύκλου $|z|<1$ (n: φυσικός ἀριθμός).

28. Δείξατε ὅτι, ἐάν $\rho < 1$, τότε διά n ἀρκούντως μεγάλο τό πολυώνυμον:

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

δέν ἔχει ρίζας ἐντός τοῦ κύκλου $|z| < \rho$.

29. Πόσαι ρίζαι τοῦ πολυωνύμου $z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$ κεῖνται εἰς τό δεξιόν ἡμιεπίπεδον;

30. Ὑπολογίσατε τό ὁλοκλήρωμα $\int_\Gamma \frac{|dz|}{|z-z_0|^2}$

ὅπου $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$, $|z_0| \neq a$.

Ὑπόδ: Κατ' ἀρχήν χρησιμοποιοῦντες τήν σχέσιν $|z|^2 = a^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = a^2$ δείξατε ὅτι εἶναι: $|dz| = -ia\frac{dz}{z}$ καί ἀκολούθως διακρίνατε τάς περιπτώσεις: i) $|z_0| < a$, ii) $|z_0| > a$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

ΜΕΡΟΜΟΡΦΟΙ ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

§1. ΜΕΡΟΜΟΡΦΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μία σπουδαία κατηγορία συναρτήσεων εἶναι ἡ κατηγορία τῶν συναρτήσεων τῶν ὁποίων τὰ μόνα ἀνώμαλα σημεῖα εἶναι πόλοι.

Ὁρισμός ΙΧ-1-1. *Μία συνάρτησις* $f(z)$, *ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτική εἰς ἕνα ἀνοικτόν σύνολον* G *ἐκτός ἀπό τά σημεῖα* (τούτου) *πεπερασμένου ἤ καί ἀπείρου* (ἀριθμησίμου) *πλήθους, πού εἶναι πόλοι αὐτῆς, θά καλεῖται μερόμορφος συνάρτησις*.

Παραδείγματα 1ον/ Ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{1-z}$ εἶναι μερόμορφος ἐντός τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}$. Αὐτή ἔχει μόνον ἕναν ἁπλόν πόλον, τό σημεῖον $z=1$. Ἡ κ-τάξεως παράγωγος αὐτῆς εἶναι μερόμορφος συνάρτησις καί ἔχει ὡς πόλον μόνον τό σημεῖον $z=1$ $(k+1)$-τάξεως.

2ον/ Ἐάν αἱ συναρτήσεις $P(z)$ καί $Q(z)$ εἶναι πολυώνυμα, τό πηλίκον $P(z)/Q(z)$ εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις ἐντός τοῦ $\mathbb{C}$ καί ἐπιδέχεται ὡς πόλους τάς ρίζας τοῦ $Q(z)$ μέ τόν αὐτόν βαθμόν πολλαπλότητος.

3ον/ Ἡ συνάρτησις $g(z)=\eta\mu z$ ἔχει ὡς ρίζας τά ἁπλά σημεῖα $k\cdot\pi$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$. Συνεπῶς ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{\eta\mu z}$ εἶναι μερόμορφος ἐντός τοῦ $\mathbb{C}$ καί ἐπιδέχεται ὡς ἁπλούς πόλους τά σημεῖα $k\cdot\pi$. Τό αὐτό συμβαίνει καί διά τήν συνάρτησιν $f(z)=\sigma\varphi z$.

4ον/ Ἡ συνάρτησις $g(z)=e^z$, ὡς γνωστόν, δέν ἔχει ρίζας. Ὅθεν, ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{e^z}$ δέν ἔχει οὐδέν ἰδιάζον σημεῖον ἐντός τοῦ $\mathbb{C}$. Ὅθεν, δέν εἶναι μερόμορφος ἐν $\mathbb{C}$.

5ον/ Ἡ συνάρτησις $g(z)=e^z-1$ ἔχει ὡς ἁπλάς ρίζας τά σημεῖα $2ik\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$. Συνεπῶς ἡ συνάρτησις $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$ εἶναι μερόμορφος ἐντός τοῦ $\mathbb{C}$ καί ἐπιδέχεται τά σημεῖα $z=2ik\pi$ ὡς ἁπλούς πόλους.

6ον/ Διά κάθε $z\neq0$ ἡ συνάρτησις $f(z)=\eta\mu\frac{1}{z}$ εἶναι μία ἀναλυτική συνάρτησις διά τήν ὁποίαν τό $z=0$ εἶναι ἕνα μεμονωμένον οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Ἐπίσης ἡ συνάρτησις $f(z)=\eta\mu\frac{1}{z}$ μηδενίζεται εἰς τά σημεῖα $z=\frac{1}{k\pi}$ $(k=\pm1,\pm2,\dots)$.

Οὕτω ἡ συνάρτησις $f(z) = \text{ημ}\frac{1}{z}$ ἔχει μίαν ἀπειρίαν ριζῶν εἰς κάθε περιοχὴν τοῦ $z=0$. Ὅθεν, ἐάν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(z) = \frac{1}{\text{ημ}1/z}$, αὕτη εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις μέ ἀπείρους πόλους, τό δέ σημεῖον $z=0$ δέν εἶναι μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον αὐτῆς, καθ᾽ ὅτι εἰς κάθε περιοχὴν τοῦ $z=0$ ὑπάρχουν ἄπειροι πόλοι τῆς συναρτήσεως.

7ον/ Ὡς γνωστόν, ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἰς τό ἐπεκτεταμένον μιγαδικόν ἐπίπεδον θά ἔχῃ πόλον τό $z=\infty$, ἐάν ἡ $f(1/z)=g(z)$ ἔχει πόλον τό σημεῖον $z=0$. Ἐάν θεωρήσωμεν τό πολυώνυμον $P(z)=a_0z^m+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, τοῦτο ἔχει πόλον m-τάξεως τό σημεῖον $z=\infty$, διότι ἡ συνάρτησις:

$$g(z) = f(1/z) = \frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n$$

ἔχει τό $z=0$ πόλον m-τάξεως. Οὕτω ἡ $P(z)$ εἶναι μερόμορφος συνάρτησις εἰς τό ἐπεκτεταμένον μιγαδικόν πεδίον.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

<u>Πρότασις IX-1-1.</u> <u>Ἐάν ἡ σειρά $\sum_n f_n(z)$ τῶν μερομόρφων συναρτήσεων συγκλίνῃ ὁμαλῶς ἐπί παντός συμπαγοῦς συνόλου, ἔστω G, τότε καί ἡ σειρά τῶν παραγώγων $\sum_n f'_n(z)$ συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπί τοῦ συμπαγοῦς G καί τό ἄθροισμά της εἶναι ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος $\sum_n f_n(z)$.</u>

Ἄς ἐπανέλθωμεν λοιπόν εἰς τήν μερόμορφον συνάρτησιν $f(z)$ ἐπί τοῦ χωρίου G. Τότε εἰς κάθε πόλον a_n ἀντιστοιχεῖ τό <u>ἰδιάζον μέρος</u> τῆς $f(z)$, τό ὁποῖον εἶναι τό πρωτεῦον μέρος τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent πού ἀναπτύσσεται ἡ $f(z)$ πέριξ τοῦ πόλου $z=a_n$. Αὐτό τό μέρος εἶναι ἕνα πολυώνυμον τῆς μορφῆς $P_n\left(\frac{1}{(z-a_n)}\right)$.

Διατάσσοντες δέ τούς πόλους κατά τάξιν μέτρου, συμφώνως πρός τ᾽ ἀνωτέρω, δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν τήν κάτωθι παράστασιν μιᾶς μερομόρφου συναρτήσεως, ἤτοι:

$$f(z) = \sum_n P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P(z) \qquad (1)$$

ὅπου ἡ $P(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό χωρίον G.

Τό ἄθροισμα τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆ (1) εἶναι ἐν γένει ἄπειρον καί οὕτω δέν δυνάμεθα νά ἐξασφαλίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τήν σύγκλισιν τῆς σειρᾶς (1). Ἐν τούτοις ὑπάρχουν μερικαί περιπτώσεις κατά τάς ὁποίας ἡ σειρά συγκλίνει καί τό σπουδαιότερον εἶναι ὅτι συχνά δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν ἀκριβῶς τήν

συνάρτησιν $P(z)$ ἀπό μίαν γενικήν θεώρησιν τῆς δοθείσης συναρτήσεως.

Δέν θά ἀσχοληθῶμεν μέ τήν ἐξέτασιν τοῦ ἀνωτέρω ἀντικειμένου εἰς ὅλον τό βάθος καθ' ὅτι τοῦτο ἐξέρχεται τοῦ σκοποῦ τοῦ παρόντος βιβλίου.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό G εἶναι ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον, ἀποδεικνύεται ὅτι, κάθε μερόμορφος συνάρτησις ἔχει ἕνα ἀνάπτυγμα εἰς ἁπλά κλάσματα καί ὅτι τό ἰδιάζον μέρος δύναται νά περιγραφῇ αὐθαιρέτως. Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις περιγράφεται ὑπό τοῦ κάτωθι θεωρήματος, τό ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τούς Mittag-Leffler.

<u>Θεώρημα IX-1-1.</u> (Mittag-Leffler). "<u>Εστω</u> $\{a_n\}, n\geq 1$ <u>μία ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ</u> $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ <u>καί ἔστω</u> $P_n(\zeta)$ <u>μία ἀκολουθία πολυωνύμων ἄνευ σταθεροῦ ὅρου. Τότε ὑπάρχουν συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι μερόμορφοι εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον μέ πόλους τά σημεῖα</u> a_n <u>καί ἀντίστοιχα ἰδιάζοντα μέρη τά</u> $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$. <u>Ἐν τούτοις ἡ πλέον γενική μερόμορφος συνάρτησις αὐτοῦ τοῦ εἴδους δύναται νά γραφῇ ὑπό τήν μορφήν</u>:

$$f(z)=\sum_n\left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-p_n(z)\right]+q(z) \qquad (2)$$

<u>ὅπου τά</u> $p_n(z)$ <u>εἶναι καταλλήλου ἐκλογῆς προσδιοριστέα πολυώνυμα καί ἡ</u> $q(z)$ <u>εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον</u>.

<u>Ἀπόδειξις</u>: Ἐπειδή ἡ $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ εἶναι ἀναλυτική διά $|z|<|a_n|$, δύναται αὕτη νά ἀναλυθῇ εἰς μίαν σειράν τοῦ Maclaurin πέριξ τῆς ἀρχῆς, ὑποθέτοντες φυσικά ὅτι, $a_n\neq 0$. Ἐκλέγομεν ὡς $p_n(z)$ ἕνα μερικόν ἄθροισμα αὐτῆς τῆς σειρᾶς μέ τελευταῖον ὅρον βαθμοῦ λ_n. Οὕτω, ἐάν $|P_n|\leq M_n$, τότε βάσει τοῦ τύπου (4), Κεφ. VII, § 1 θά ἔχωμεν, ἐάν θέσωμεν $|\zeta|=r_1=\frac{|a_n|}{2}$ καί $|z|=r<r_1$

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-p_n(z)\right|=\left|R_{\lambda_n+1}(z)\right|\leq M_n\cdot\frac{|a_n|}{2}\cdot\frac{1}{\frac{|a_n|}{2}-r}\cdot\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\lambda_n+1}.$$

Ἐάν $|z|=r<\frac{|a_n|}{4}$, τότε $\frac{1}{\frac{|a_n|}{4}-r}<\frac{1}{\frac{|a_n|}{2}}$ καί ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται:

$$\left| P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - p_n(z) \right| \leq M_n \cdot \left(\frac{4|z|}{|a_n|}\right)^{\lambda_n+1} \qquad (3)$$

ἥτις ἰσχύει διά $|z| \leq \frac{|a_n|}{4}$.

Μέ αὐτόν τόν ὑπολογισμόν εἶναι προφανές, ὅτι ἡ σειρά τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (3) δύναται νά συγκλίνῃ ἐκλέγοντες τούς ἐκθέτας λ_n ἀρκούντως μεγάλους.

Διά χρησιμοποιήσεως τοῦ τύπου τοῦ δίδοντος τήν ἀκτῖνα συγκλίσεως μιᾶς δυναμοσειρᾶς εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ δυναμοσειρά:

$$\sum_n M_n \left(\frac{4z}{a_n}\right)^{\lambda_n+1} \qquad (4)$$

συγκλίνει εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον, ἐάν τό $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M_n^{1/\lambda_n}}{|b_n|} = 0$ καί αὐτό συμβαίνει, ἐάν $\lambda_n > \log M_n$.

Θεωροῦμεν ἕναν αὐθαίρετον δίσκον $|z| \leq R$. Ἡ σειρά $\sum\limits_n (P_n - p_n)$ ἔχει μόνον ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν ὅρων, οἱ ὁποῖοι καθιστοῦν αὐτήν ἄπειρον ἐντός τοῦ δίσκου $|z| \leq R$ καί ἀπό μίαν ὡρισμένην τιμήν τοῦ n καί μετά ἡ ἀνισότης (3) θά ἰσχύῃ παντοῦ ἐπί τοῦ δίσκου. Ἐάν δέ οἱ ὅροι μέ $|a_n| \leq R$ παραληφθοῦν, ἡ ἐναπομένουσα σειρά, λόγῳ τῆς (3), θά συγκλίνῃ ἀπολύτως καί ὁμαλῶς ἐντός τοῦ $|z| \leq R$. Ἐπειδή τό R ἐλήφθη αὐθαίρετον, ἡ σειρά $\sum\limits_n (P_n - p_n)$ συγκλίνει δι' ὅλα τά $z \neq a_n$ καί παριστᾷ μίαν μερόμορφον συνάρτησιν εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον.

Ἡ συνάρτησις αὐτή θά ἔχῃ τούς αὐτούς πόλους καί ἰδιάζοντα μέρη μέ τήν $f(z)$.

Ὅθεν, ἡ διαφορά:

$$f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[P\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - P_n \right]$$

τήν ὁποίαν ἄς καλέσωμεν $g(z)$, θά εἶναι, προφανῶς, μία ἀναλυτική συνάρτησις. ὅ.ε.δ.

§2. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ MITTAG-LEFLLER.

I. Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{\pi^2}{\eta\mu^2 \pi z}$ ἔχει πόλους 2-τάξεως τά σημεῖα $z = n$, n: ἀκέραιος. Τό ἰδιάζον μέρος τῆς $f(z)$ διά $z=0$, δηλ. τό πρωτεῦον μέρος τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent πού ἀναπτύσσεται ἡ $f(z)$ πέριξ τοῦ σημείου $z=0$, εἶναι τό $\frac{1}{z^2}$ καί

ἐπειδὴ $ημ^2 π(z-n) = ημ^2 πz$, τὰ ἰδιάζοντα μέρη εἰς τὰ σημεῖα $z=n$ εἶναι $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Ἡ σειρά:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad (1)$$

συγκλίνει διά $z \neq n$, διότι συμφώνως πρός τό κριτήριον συγκρίσεως ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ εἶναι συγκλίνουσα. Αὐτη ἡ σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπί παντός συμπαγοῦς συνόλου, ἐφ' ὅσον παραλειφθοῦν οἱ ὅροι οἱ ὁποῖοι τήν καθιστοῦν ἄπειρον ἐπ' αὐτοῦ τοῦ συνόλου.

Συμφώνως λοιπόν πρός τό ἀνωτέρω θεώρημα δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\frac{\pi^2}{ημ^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + q(z) \qquad (2)$$

ὅπου ἡ $q(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ ἐπιπέδου. Ἐν συνεχείᾳ θά δείξωμεν ὅτι ἡ $q(z)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Πρός τούτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\frac{\pi^2}{ημ^2 \pi z}$ καί ἡ σειρά (1) εἶναι περιοδικαί μέ περίοδον 1[1]. Συνεπῶς καί ἡ $q(z)$ θά ἔχῃ τήν αὐτήν περίοδον.

Θέτοντες $z = x + iy$ θά ἔχωμεν:

$$|ημ\, \pi z|^2 = \cosh^2 y - συν^2 x$$

καί ἐντεῦθεν τό $\frac{\pi^2}{ημ^2 \pi z}$ τείνει ὁμαλῶς πρός τό 0 τοῦ $|y| \longrightarrow \infty$. Ἤδη εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι καί ἡ συνάρτησις (1) ἔχει τήν αὐτήν ἰδιότητα, δηλ. τείνει πρός τό μηδέν τοῦ $|y| \longrightarrow \infty$. Πράγματι ἡ σύγκλισις αὐτῆς εἶναι ὁμαλή διά $|y| \geq 1$ καί ἐπειδή ἔχομεν $\frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \leq \frac{1}{y^2}$, ἔπεται ὅτι τοῦ $|y| \longrightarrow \infty$ ἡ σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ τείνει πρός τό μηδέν. Ὅθεν, καί ἡ $q(z)$ τείνει ὁμαλῶς πρός τό μηδέν τοῦ $|y| \longrightarrow \infty$. Αὐτό εἶναι ἱκανόν νά συμπεράνωμεν ὅτι ἡ $|q(z)|$ εἶναι φραγμένη εἰς μίαν περιοδικήν λωρίδα $0 \leq x \leq 1$ καί λόγῳ τῆς περιοδικότητος τῆς $|q(z)|$ αὕτη θά εἶναι φραγμένη εἰς ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον. Συμφώνως δέ πρός τό θεώρημα τοῦ Liouville ἡ $q(z)$ θά πρέπει νά ἀνάγεται εἰς μίαν σταθεράν καί ἐπειδή τό ὅριον αὐτῆς διά $|y| \longrightarrow \infty$ εἶναι μηδέν, θά πρέπει νά ἔχωμεν $q(z) \equiv 0$. Ἡ (2) λοιπόν γράφεται:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{ημ^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}} \qquad (3)$$

---

1) *Ἰσχύει ὁ αὐτός ὁρισμός τῆς περιοδικότητος ὅπως καί εἰς τάς πραγματικάς συναρτήσεις.*

II. Θεωροῦμεν τήν σειράν:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = f(z) \qquad (4)$$

(ὅπου ὁ τόνος εἰς τό σύμβολον τῆς ἀθροίσεως δηλοῖ ὅτι δέν λαμβάνεται ὁ ὅρος πού ἀντιστοιχεῖ εἰς $n=0$)

Αὐτή ἡ σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς κάθε συμπαγές σύνολον.

Πράγματι,

$$\left|\frac{z}{n(z-n)}\right| \leq \frac{r}{|n|\cdot||n|-r|} \quad \text{διά } |n|>r \text{ καί } |z|=r$$

Ὁ γενικός ὅρος φράσσεται ἀπό τόν γενικόν ὅρον μιᾶς συγκλινούσης σειρᾶς. Ὑπάρχει λοιπόν ὁμαλή σύγκλισις τῆς θεωρηθείσης σειρᾶς, παραλείποντες ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν ὅρων τῆς δοθείσης σειρᾶς (εἶναι αὐτοί διά τούς ὁποίους $|n|\leq r$).

Τό ἄθροισμα $f(z)$ αὐτῆς τῆς σειρᾶς εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις. Δυνάμεθα λοιπόν νά παραγωγίσωμεν ὅρον πρός ὅρον αὐτήν τήν σειράν καί οὕτω νά ἐπιτύχωμεν:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left\{-\frac{1}{(z-n)^2}\right\} = -\left\{\frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(z-n)^2}\right\} = -\frac{\pi^2}{\eta\mu^2\pi z} \qquad (\text{λόγω τῆς } 3)$$

Συνεπῶς δι᾽ ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$f(z) = \pi\cdot\sigma\varphi\,\pi z + C \qquad (5)$$

Ἐπειδή αἱ $f(z)$ καί $\sigma\varphi\,\pi z$ εἶναι περιτταί συναρτήσεις, θά ἔχωμεν:

$$f(-z) = \pi\sigma\varphi(-\pi z) + C \quad \text{ἤ}$$

$$-f(z) = -\pi\sigma\varphi(\pi z) + C \qquad (5')$$

Διά προσθέσεως τῶν (5) καί (5′) λαμβάνομεν $C=0$.

Οὕτω ἔχομεν: $\qquad f(z) = \pi\cdot\sigma\varphi\,\pi z \qquad (6)$ ἤ

$$\boxed{\pi\cdot\sigma\varphi\,\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)} \qquad (7)$$

Ἐάν εἰς τήν (7) προσθέσωμεν ἀνά δύο τούς ὅρους πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τά n καί $-n$, θά λάβωμεν τελικῶς:

$$\boxed{\pi\cdot\sigma\varphi\,\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}} \qquad (8)$$

III. Θεωροῦμεν τήν σειράν:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} \qquad (9)$$

Ὅπως εἰς τό πρῶτον παράδειγμα, οὕτω καί ἐδῶ ἀποδεικνύεται ἐντελῶς ὅμοια, ὅτι ἡ ἀνωτέρω σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπί παντός συμπαγοῦς συνόλου. Τό ἄθροισμα δέ ταύτης εἶναι μία περιοδική συνάρτησις περιόδου 1. Ἤδη ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν:

$$g(z) \equiv \frac{\pi^2}{\text{ημ}\pi z \cdot \text{εφ}\pi z} = \pi^2 \frac{\text{συν}\,\pi z}{\text{ημ}^2\pi z}$$

Θέτομεν: $k(z) = f(z) - g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} - \pi^2 \frac{\text{συν}\,\pi z}{\text{ημ}^2\pi z}$ (10)

Αὕτη εἶναι μία ἀναλυτική συνάρτησις ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, διότι ὁ ὅρος $\frac{1}{z^2}$ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ Laurent τῆς $g(z)$ ἐξαλείφεται μεταξύ τοῦ ὅρου $\frac{1}{z^2}$ τῆς $f(z)$ καί οὕτω δέν ὑπάρχει ὁ ὅρος $\frac{1}{z^2}$. Τό αὐτό συμβαίνει καί διά τούς ἄλλους πόλους, λόγω τῆς περιοδικότητος. Οὕτω ἡ διαφορά $f(z) - g(z) = k(z)$ εἶναι μία ἀναλυτική συνάρτησις ἐπί τοῦ $\mathbb{C}$ καί περιόδου 1.

Ἀποδεικνύεται κατ' ἀνάλογον τρόπον, ὅπως καί εἰς τό πρῶτον παράδειγμα, ὅτι:

$$\lim_{|y|\to\infty} k(z) = 0 \;, \quad (\text{ὅπου } z = x+iy).$$

Συνεπῶς ἡ $k(z)$ εἶναι φραγμένη καί κατά τό θεώρημα τοῦ Liouville αὐτη θά πρέπει νά εἶναι σταθερά, ἡ δέ σταθερά τιμή αὐτῆς θά εἶναι προφανῶς ἴση πρός τό μηδέν.

Ὅθεν, λόγω τῆς (10), ἔχομεν: $\pi^2 \frac{\text{συν}\pi z}{\text{ημ}^2\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2}$ (11)

Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν: $F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$ (12)

ἡ ὁποία συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπί παντός συμπαγοῦς συνόλου.

Διά παραγωγίσεως ὅρον πρός ὅρον τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς εὑρίσκομεν:

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{(z-n)^2} \qquad (13)$$

Λόγω δέ τῶν (11) καί (13) ἔχομεν τελικῶς: $F'(z) = \pi^2 \cdot \frac{\text{συν}\,\pi z}{\text{ημ}^2\pi z}$.

Ὅθεν, $F(z) = \pi^2 \int \frac{\text{συν}\,\pi z}{\text{ημ}^2\pi z}\, dz = \frac{\pi}{\text{ημ}\pi z} + c$ (14)

Ἡ σταθερά εἶναι μηδέν καθ' ὅτι, αἱ συναρτήσεις $F(z)$ καί ημπz εἶναι περιτταί συναρτήσεις. Συνεπῶς ἐκ τῶν (12) καί (14) λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\boxed{\frac{\pi}{\text{ημ}\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)} \qquad (15)$$

Ὁ τύπος (15) γράφεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\frac{\pi}{\eta\mu\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{2z}{(z^2-n^2)}} \qquad (16)$$

§3. ΑΠΕΙΡΟΓΙΝΟΜΕΝΑ

Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν:

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$$

Ἐξ αὐτῆς δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν γινομένων:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} (1+c_k) = (1+c_0)\cdot(1+c_1)\cdots(1+c_n),\ n\geq 0 \qquad (1)$$

ὁ P_n καλεῖται n-τάξεως ***μερικόν γινόμενον*** τῆς ἀκολουθίας $\{1+c_k\}$, $k\geq 0$.

Τό συμβολικόν γινόμενον:

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k) = (1+c_0)\cdot(1+c_1)\cdots(1+c_n)\cdots \qquad (2)$$

καλεῖται ***ἀπειρογινόμενον*** τῆς ἀκολουθίας $\{1+c_k\}$, $k\geq 0$

Ὁρισμός IX-3-1. *Θά λέγωμεν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον* $\prod_{k=0}^{\infty}(1+c_k)$ ***συγκλίνει***, *ἐάν ἡ ἀκολουθία* $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+c_k)$, $n\geq 0$ *τῶν μερικῶν γινομένων συγκλίνῃ πρός ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν διάφορον τοῦ μηδενός.*

Ἐάν ὁ P_n τείνῃ πρός τό μηδέν χωρίς κάθε παράγων $1+c_k$ νά εἶναι ἴσος πρός τό μηδέν ἤ χωρίς νά τείνῃ (κάθε παράγων) πρός ἕνα πεπερασμένον ὅριον, τότε θά λέγωμεν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον ***ἀποκλίνει.***

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου πεπερασμένον τό πλῆθος παράγοντες τοῦ γινομένου εἶναι ἴσοι πρός τό μηδέν, θά λέγωμεν καί πάλιν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον συγκλίνει, ὅταν τό γινόμενον πού ἐπιτυγχάνομεν, ἐάν ἀφαιρέσωμεν αὐτούς τούς μηδενίζοντας παράγοντας, συγκλίνῃ.

Οὕτω, ἕνα ἀπειρογινόμενον εἶναι μηδέν, ἐάν τουλάχιστον ἕνας τῶν παραγόντων του εἶναι μηδέν.

Δυνάμεθα λοιπόν νά ὑποθέσωμεν ὅτι, εἰς τό ἀπειρογινόμενον (2) εἶναι $c_k \neq -1$ διά κάθε $k\in N$.

Ἐπειδή $P_n = P_{n-1}\cdot(1+c_n)$ καί ἐπί πλέον ἐπειδή εἶναι, $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_{n-1} = P \neq 0$ θά ἔχωμεν:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{P_n}{P_{n-1}} - 1\right) = 0.$$

Ὅθεν, μία ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+c_k)$ συγκλίνῃ, εἶναι ὅτι, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δέν εἶναι καί ἱκανή, δηλ. ἐάν $\lim_{n\to\infty} c_n=0$ τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+c_k)$ δύναται καί νά ἀποκλίνῃ.

Πρότασις IX-3-1. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+c_k)$ συγκλίνῃ, εἶναι διά κάθε $\varepsilon>0$ νά ὑπάρχῃ ἕνας φυσικός ἀριθμός $N_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διά $n>N_0(\varepsilon)$ καί $k>0$ νά ἔχωμεν:

$$\left|(1+c_{n+1})\cdot(1+c_{n+2})\cdots(1+c_{n+k})-1\right|<\varepsilon.$$

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον). Ἔστω $P_n=(1+c_1)\cdot(1+c_2)\cdots(1+c_n)$ καί ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $P_n\longrightarrow P\ (\neq 0)$, τοῦ $n\uparrow\infty$.

Ἐντεῦθεν ὑπάρχει ἕνας θετικός ἀριθμός $\omega<|P|$ τοιοῦτος, ὥστε $|P_n|>\omega$ διά $n=1,2,3,\ldots$

Συμφώνως πρός τό κριτήριον τοῦ Cauchy ὑπάρχει ἕνα N_0 τοιοῦτον, ὥστε διά $n>N_0$ νά ἔχωμεν:

$$|P_{n+k}-P_n|<\omega\cdot\varepsilon \quad \text{διά } n>N_0 \quad (1) \quad \text{ἤ}$$

διαιροῦντες τήν (1) διά $|P_n|$ θά ἔχωμεν:

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}-1\right|<\frac{\omega}{|P_n|}\cdot\varepsilon \quad \text{διά } n>N_0 \qquad (2)$$

Ἐπειδή $\frac{\omega}{|P_n|}<1$, κατά μείζονα λόγον θά ἔχωμεν:

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}-1\right|<\varepsilon \quad \text{διά } n>N_0 \qquad (3) \quad \text{ἤ}$$

$$\left|(1+c_{n+1})\cdot(1+c_{n+2})\cdots(1+c_{n+k})-1\right|<\varepsilon \quad \text{διά } n>N_0 \text{ καί } k=1,2,3,\ldots \qquad (4)$$

(Ἱκανόν). Ἔστω ὅτι ἰσχύει:

$$\left|(1+c_{n+1})\cdot(1+c_{n+2})\cdots(1+c_{n+k})-1\right|<\varepsilon \qquad (5)$$

Ἐάν λάβωμεν $\varepsilon=1/2$ εἰς τήν σχέσιν (5) καί ἔστω

$$\tilde{P}_n=(1+c_{n_0+1})\cdot(1+c_{n_0+2})\cdots(1+c_n),\ n>N_0 \qquad (6)$$

τότε θά ἔχωμεν: $\left|\tilde{P}_n-1\right|<\frac{1}{2}$ διά $n>N_0$ (7)

Ἐκ τῆς (7) λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{2} < \left| \tilde{P}_n \right| < \frac{3}{2} \qquad (8)$$

Ἐκ τῆς (8) συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀκολουθία $\{\tilde{P}_n\}$, $n > N_o$ συγκλίνῃ πρός κάποιο ὅριο, τοῦτο θὰ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Ὅθεν, καί ἡ ἀκολουθία $\{P_n\}$, $n \geq 1$ εἶναι φραγμένη, ἤτοι ὑπάρχει ἕνας $M > 0$ τοιοῦτος, ὥστε $|P_n| \leq M$ διά κάθε n. Ἄν θεωρήσωμεν ἤδη ἕνα αὐθαίρετον $\varepsilon > 0$ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (5), δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$\left| \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1 \right| < \varepsilon \qquad (9)$$

Κατά συνέπειαν:

$$|P_{n+k} - P_n| < \varepsilon \cdot |P_n| < \varepsilon \cdot M \qquad (10)$$

Ἐκ τῆς (10) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{P_n\}$ $n \geq 1$ πληροῖ τό κριτήριον τοῦ Cauchy καί ἐπειδή αὔτη ἔχει ἕνα ὅριον $\neq 0$, τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+C_k)$ θά συγκλίνῃ.

<u>Πρότασις IX-1-2. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τό ἀπειρογινόμενον</u> $\prod_{k=0}^{\infty}(1+C_k)$ <u>συγκλίνῃ, εἶναι ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \log(1+C_k)$.

<u>Ἀπόδειξις</u>: (Ἱκανόν). Ἔστω $S_n = \sum_{k=0}^{n} \log(1+C_k)$ (1), τότε θά ἔχωμεν: $e^{S_n} = \prod_{k=0}^{n}(1+C_k)$ (2)

Καί ἐπειδή ἡ ἐκθετική συνάρτησις e^z εἶναι συνεχής, ἕπεται ὅτι ἡ σύγκλισις τῆς $S_n \to S$ τοῦ $n \uparrow \infty$ συνεπάγεται ὅτι καί ἡ $e^{S_n} \to e^S$ τοῦ $n \uparrow \infty$, δηλ. ἡ $\prod_{k=0}^{n}(1+C_k) \to e^S$ τοῦ $n \uparrow \infty$ (3), ἤτοι τό $\prod_{k=0}^{\infty}(1+C_k)$ συγκλίνει.

(Ἀναγκαῖον). Ἔστω ὅτι τό $\prod_{k=0}^{\infty}(1+C_k)$ συγκλίνει, τότε συμφώνως πρός τήν Πρότασιν IX-3-1 διά κάθε $\varepsilon > 0$ καί < 1 δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕν $N_o(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\left|(1+C_{n+1})\cdot(1+C_{n+2})\cdots(1+C_{n+k}) - 1\right| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (4) \text{ διά } n \geq N_o \text{ καί } k \geq 1.$$

Ἐάν $|z| < \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{1}{2}$ θά ἔχωμεν ἐπίσης:

$$|\log(1+z)| < \varepsilon \qquad (5),$$

διότι, ἐάν $|z| < \frac{1}{2}$ καί ἀναπτύξωμεν κατά Taylor τήν $\log(1+z)$, εὑρίσκομεν:

$$|\log(1+z)| \leq |z| + \frac{1}{2}|z|^2 + \cdots \leq |z| + |z|^2 + \cdots = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z| < 2\cdot\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon.$$

Θέτοντες $z=(1+c_{n+1})\cdot(1+c_{n+2})\cdots(1+c_{n+k})-1$ (6), παρατηροῦμεν, λόγω τῆς (4), ὅτι $|z|<\frac{1}{2}\ \varepsilon<\frac{1}{2}$ καί κατά συνέπειαν, λόγω τῆς (5), θά ἔχωμεν:

$$\left|\log\left[(1+c_{n+1})\cdot(1+c_{n+2})\cdots(1+c_{n+k})\right]\right|=\left|\log(1+z)\right|<\varepsilon \quad (7)$$

Ἡ (7) γράφεται:

$$\left|\log(1+c_{n+1})+\log(1+c_{n+2})+\cdots+\log(1+c_{n+k})+2q\pi i\right|<\varepsilon \quad (8)$$

(βλ. σχετ. θεώρημα II-5-2).

Ἀρκεῖ λοιπόν ν' ἀποδείξωμεν ὅτι $q=0$.

Διά $k=1$ καί $n\geq N_0$ ἔχομεν:

$$\left|\log(1+c_{n+1})+2q\pi i\right|<\varepsilon \quad (9)$$

Ἵνα ἰσχύη ἡ (9) ἀρκεῖ νά εἶναι $q=0$.

Διά $k=2$ καί $n\geq N_0$ ἔχομεν:

$$\left|\log(1+c_{n+1})+\log(1+c_{n+2})+2q\pi i\right|<\varepsilon \quad (10)$$

Ἐπειδή ἕκαστος τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς (10) ἔχει μέτρον $<\varepsilon$ καί ἐπειδή ὁλόκληρον τό ἄθροισμα πρέπει νά ἔχη μέτρον $<\varepsilon$, συμπεραίνομεν ὅτι θά πρέπει νά εἶναι $q=0$. Συνεχίζοντες κατ' αὐτόν τόν τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι θά πρέπει νά ἔχωμεν $q=0$ διά κάθε $k\geq 1$.

Ἡ (8) λοιπόν γράφεται:

$$\left|\log(1+c_{n+1})+\log(1+c_{n+2})+\cdots+\log(1+c_{n+k})\right|<\varepsilon \text{ διά } n\geq N_0 \quad (11)$$

ἤτοι πληροῦται τό κριτήριον τοῦ Cauchy διά τήν σειράν $\sum_{k=0}^{\infty}\log(1+c_k)$ καί κατά συνέπειαν αὕτη συγκλίνει.

<u>Ὁρισμός IX-3-2</u>. *Τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+c_k)$ θά λέγωμεν ὅτι συγκλίνει ἀπολύτως, ἐάν τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+|c_k|)$ συγκλίνη.*

<u>Πρότασις IX-1-3</u>. <u>Ἡ ἀπόλυτος σύγκλισις τοῦ $\prod_{k=0}^{\infty}(1+c_k)$ συνεπάγεται τήν σύγκλισιν αὐτοῦ.</u>

<u>Ἀπόδειξις</u>: Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν ἀνισότητα:

$$\left|(1+c_{n+1})\cdot(1+c_{n+2})\cdots(1+c_{n+k})-1\right|\leq(1+|c_{n+1}|)\cdot(1+|c_{n+2}|)\cdots(1+|c_{n+k}|)-1$$

καί τήν Πρότασιν IX-3-1 ἔχομεν τό συμπέρασμα.

Πρότασις IX-3-4. Τό ἀπειρογινόμενο $\prod_{k=0}^{\infty}(1+c_k)$ συγκλίνει ἀπολύτως, ἐάν ἡ σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνῃ ἀπολύτως.

Ἀπόδειξις: (Ἱκανόν) Ἔστω ὅτι ἡ σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει ἀπολύτως. Ἐντεῦθεν $c_k \to 0$ τοῦ $k \uparrow \infty$ καί ὡς ἐκ τούτου ἀπό κάποια τιμή τοῦ k καί μετά θά ἔχωμεν: $|c_k| < \frac{1}{2}$.

Εἶναι δέ:

$$\left|1-\frac{\log(1+c_k)}{c_k}\right| = \left|\frac{1}{2}c_k - \frac{1}{3}c_k^2 + \cdots\right| \leq \frac{1}{2}\left(|c_k| + |c_k|^2 + \cdots\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{|c_k|}{1-|c_k|} \leq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) εὐκόλως συνάγομεν ὅτι:

$$\frac{1}{2}|c_k| \leq |\log(1+c_k)| \leq \frac{3}{2}|c_k| \qquad (2)$$

Ἡ (2) ἀποδεικνύει ὅτι, ἡ σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}|\log(1+c_k)|$ συγκλίνει, ἐάν καί μόνον, ἐάν ἡ σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνῃ ἀπολύτως. Ἐπειδή ἡ (2) παραμένει ἀληθής, ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό c_k ὑπό τοῦ $|c_k|$, συμπεραίνομεν, συμφώνως πρός τήν Πρότασιν IX-3-2, ὅτι τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+|c_k|)$ συγκλίνει (ἀπόλυτος σύγκλισις), ἐάν καί μόνον, ἐάν ἡ σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ συγκλίνῃ.

Ὁμαλή σύγκλισις ἀπειρογινομένου.

Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν τῶν συναρτήσεων:

$$f_0(z),\ f_1(z),\ f_2(z), \ldots$$

ὅπου ἑκάστη συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη διά κάθε z ἑνός συνόλου $G \subset \mathbb{C}$.

Ὑποθέτομεν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον:

$$\prod_{k=0}^{\infty}\{1+f_k(z)\} \qquad (1)$$

συγκλίνει διά κάθε $z \in G$. Ἐάν ἡ ἀκολουθία:

$$F_n(z) = \prod_{k=0}^{n}\{1+f_k(z)\} \qquad (2)$$

συγκλίνῃ ὁμαλῶς ἐντός τοῦ G, δηλ. ἐάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ ἕνας ἀκέραιος $N(\varepsilon)$ ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τοῦ ε καί οὐχί ἀπό τήν εἰδικήν τιμήν τοῦ z ἐντός τοῦ G τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν: $|F_n(z) - F(z)| < \varepsilon$ δι' ὅλα τά $n \geq N(\varepsilon)$, τότε θά λέγωμεν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον (1) συγκλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ G.

Θεώρημα IX-3-1. Ἐάν ἐντός τοῦ χωρίου G εἶναι $f_k(z) \neq -1$ διά κάθε k καί ἐάν ὑπάρχῃ μία σταθερά M_k τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν $|f_k(z)| \leq M_k$ διά κάθε k καί ἡ σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνῃ, τότε τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty} [1+f_k(z)]$ συγκλίνει ἀπολύτως καί ὁμαλῶς ἐντός τοῦ G.

Ἀπόδειξις: Θέτομεν: $F_n(z) = \prod_{k=1}^{n} [1+f_k(z)]$ καί $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+M_k)$

Τότε $F_n - F_{n-1} = (1+f_1(z))(1+f_2(z)) \cdots (1+f_{n-1}(z))\, f_n(z)$

καί $P_n - P_{n-1} = (1+M_1)\cdot(1+M_2)\cdots(1+M_{n-1})\cdot M_n \geq 0$.

Ὅθεν, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως, θά ἔχωμεν:

$$|F_n(z) - F_{n-1}(z)| \leq P_n - P_{n-1} \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως, $F_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (F_k(z) - F_{k-1}(z))$ καί $P_n = \sum_{k=1}^{n} (P_k - P_{k-1})$, ἐάν φυσικά ὁρίσωμεν: $F_0(z) = P_0 = 0$. Ἐπειδή ἡ σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, κατά τήν Πρότασιν IX-3-4, καί τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty}(1+M_k)$ συγκλίνει, συνεπῶς ὑπάρχει τό $\lim_{n\to\infty} P_n$ δηλ. ἡ σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(P_k - P_{k-1})$ συγκλίνει καί ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ τῆς (1) καί τοῦ κριτηρίου τοῦ Weierstrass (βλ. Θεώρημα VII-4-2) καί ἡ σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(F_n(z) - F_{n-1}(z))$ συγκλίνει ἀπολύτως καί ὁμαλῶς διά κάθε $z \in G$. Τό τελευταῖον σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν συναρτήσεων $\{F_n(z)\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει ὁμαλῶς διά κάθε $z\in G$, δηλ. τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+f_k(z))$ συγκλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ G.

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται καί αἱ κάτωθι προτάσεις:

Πρότασις IX-3-5. Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f_k(z)$ εἶναι συνεχεῖς ἐντός τοῦ G διά κάθε k καί ἐάν τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k(z))$ συγκλίνῃ ὁμαλῶς ἐντός τοῦ G πρός τήν $f(z)$, τότε ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχής ἐντός τοῦ G.

Πρότασις IX-3-6. Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f_k(z)$ εἶναι ἀναλυτικαί ἐντός τοῦ G διά κάθε k καί ἐάν τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k(z))$ συγκλίνῃ ὁμαλῶς πρός τήν $f(z)$ διά κάθε συμπαγές ὑποσύνολον τοῦ G, τότε ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τοῦ G.

Πρότασις IX-3-7. (Λογαριθμική παράγωγος τοῦ γινομένου) Ἐάν $\{f_k(z)\}$, $k\geq 0$,

εἶναι μία ἀκολουθία ἀναλυτικῶν συναρτήσεων ἐντός τοῦ χωρίου G καί ἡ σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ συγκλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ G πρός μίαν φραγμένην συνάρτησιν, τότε (ὡς γνωστόν) τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty}(1+f_k(z))$ συγκλίνει ὁμαλῶς καί ἀπολύτως πρός μίαν ἀναλυτικήν συνάρτησιν $F(z)$ ἐντός τοῦ G. Ἐάν ἐπί πλέον εἶναι $F(z) \neq 0$ διά κάθε $z \in G$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\boxed{\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{1+f_k(z)}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή $F(z) \neq 0$ ἔπεται ὅτι οὐδείς τῶν παραγόντων $1+f_k(z)$ εἶναι μηδέν. Ἡ ἀκολουθία $F_n(z) = \prod_{k=0}^{n}\{1+f_k(z)\}$ συγκλίνει ὁμαλῶς πρός τήν συνάρτησιν $F(z)$, ὅθεν κατά τό Θεώρημα VII-4-4 καί ἡ ἀκολουθία $\{F_n'(z)\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει ὁμαλῶς πρός τήν συνάρτησιν $F'(z)$ καί κατά συνέπειαν:

$$\frac{F_n'(z)}{F_n(z)} \longrightarrow \frac{F'(z)}{F(z)} \quad \text{τοῦ } n\uparrow\infty \qquad (2)$$

Ἀλλά:

$$\frac{F_n'(z)}{F_n(z)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k'(z)}{1+f_k(z)} \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καί (3) λαμβάνομεν τελικῶς διά $n\uparrow\infty$.

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n'(z)}{F_n(z)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f_k'(z)}{1+f_k(z)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k'(z)}{1+f_k(z)}.$$

§4. ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Καλοῦμεν ***ἀκεραίαν συνάρτησιν*** αὐτή πού εἶναι ἀναλυτική εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον. Τό σημεῖον $z=\infty$ εἶναι ἕνα ἰδιάζον σημεῖον διά μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν, ἐκτός ἐάν αὐτή εἶναι σταθερά.

Κάθε ἀκεραία συνάρτησις $F(z)$ δύναται νά παρασταθῆ ὑπό μιᾶς δυναμοσειρᾶς, ἤτοι:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (1)$$

μέ ἀκτῖνα συγκλίσεως ἄπειρον.

Ἡ σειρά (1) προσδιορίζει τήν τιμήν τῆς συναρτήσεως $F(z)$ διά κάθε πεπερασμένον z. Οὕτω, συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω, ἡ ἀκεραία συνάρτησις δύναται

νά θεωρηθῆ ὅτι ἔχει τήν ἁπλουστάτην κατασκευήν ἐξ ὅλων τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων. Τά πολυώνυμα ἀποτελοῦν μίαν εἰδικήν κατηγορίαν ἀκεραίων συναρτήσεων.

Ἀκέραιαι συναρτήσεις πού δέν εἶναι πολυώνυμα καλοῦνται ***ὑπερβατικαί συναρτήσεις***. Αὗται δύνανται νά χαρακτηρισθοῦν ἐκ τῆς ἰδιότητος ὅτι ἡ σειρά τοῦ Taylor αὐτῶν ἔχει ἀπείρους συντελεστάς $\neq 0$. Προφανῶς κάθε ἀκεραία συνάρτησις εἶναι ὁλομορφώσιμος.

Ἔστω $F(z)$ μία ἀκεραία συνάρτησις. Τό πλῆθος τῶν ριζῶν της δύναται νά εἶναι πεπερασμένο ἤ καί ἄπειρο. Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν τό σύνολον τῶν ριζῶν δέν δύναται νά ἔχῃ ἕνα πεπερασμένον σημεῖον συσσωρεύσεως, ἐκτός ἐάν ἡ συνάρτησις ἰσοῦται πρός μηδέν.

Συνεπῶς, <u>ἐάν μία ἀκεραία συνάρτησις ἔχῃ ἕναν ἄπειρον πλῆθος ριζῶν καί εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, τότε αἱ ρίζαι δύνανται νά τοποθετηθοῦν κατά μίαν ἀκολουθίαν</u> $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ <u>τείνουσα πρός τό ἄπειρον.</u>

Π.χ. δυνάμεθα νά τάς τοποθετήσωμεν κατά αὔξουσαν ἀπόλυτον τιμήν, ἤτοι: $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \dots$, ὅπου $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Ἔστω τό ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \cdots + C_n, \quad C_0 \neq 0, \; n > 0 \qquad (1)$$

τό ὁποῖον, ὡς γνωστόν, ἔχει n-ρίζας, ἔστω τάς $a_1, a_2, \dots, a_n$ καί ὡς ἐκ τούτου δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$f(z) = C_0 (z-a_1)\cdot(z-a_2)\cdots(z-a_n) \qquad (2)$$

ἤ καί ὑπό τήν μορφήν:

$$f(z) = C_n \left(1-\frac{z}{a_1}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right), \quad C_n \neq 0 \qquad (3)$$

Ἤδη τίθεται τό ἑξῆς πρόβλημα:

Ἐάν εἶναι δυνατόν νά εὕρωμεν μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν ἔχουσα μηδενίζοντας (ρίζας) δεδομένους ἀριθμούς καί νά ἐκφράσωμεν αὐτήν (τήν συνάρτησιν) ὑπό μορφήν ἑνός ἀπειρογινομένου.

Κατ' ἀρχάς παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιαι συναρτήσεις ἄνευ ριζῶν, π.χ. ἡ e^z, γενικώτερον δέ ἡ $e^{\varphi(z)}$, ὅπου $\varphi(z)$ παριστᾶ μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν.

- Ἀπάντησιν εἰς τό τεθέν ἀνωτέρω πρόβλημα δίδει τό πόρισμα IX-4-1.

Ἀποδεικνύομεν προηγουμένως τήν ἑξῆς πρότασι.

Πρότασις IX-4-1. Ἐάν $q(z)$ εἶναι μία ἀκεραία συνάρτησις ἡ ὁποία δέν ἔχει μηδενίζοντας, αὐτή δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $e^{\varphi(z)}$, ὅπου $\varphi(z)$ εἶναι ἀκεραία συνάρτησις.

Ἀπόδειξις: Ἡ συνάρτησις $\frac{q'(z)}{q(z)}$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

Ὁλοκληροῦντες δέ ταύτην κατά μῆκος ἑνός τυχόντος δρόμου ἀπό 0 ἕως z λαμβάνομεν:

$$\varphi(z) = \log q(0) + \int_0^z \frac{q'(\zeta)}{q(\zeta)}\, d\zeta \qquad (1),$$

ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης ἀκεραία συνάρτησις.

Εἶναι δέ, $\varphi(0) = \log q(0)$ ἤ $q(0) = e^{\varphi(0)}$.

Διά παραγωγίσεως τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$\varphi'(z) = \frac{q'(z)}{q(z)} \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ λογαριθμική παράγωγος τῆς $\frac{e^{\varphi(z)}}{q(z)}$ εἶναι:

$$\varphi'(z) - \frac{q'(z)}{q(z)} = 0 \qquad (\text{λόγω τῆς } (2))$$

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις $\frac{e^{\varphi(z)}}{q(z)}$ θά πρέπει νά εἶναι σταθερά καί ὡς ἐκ τούτου:

$$\frac{e^{\varphi(z)}}{q(z)} = \frac{e^{\varphi(0)}}{q(0)} = 1 \qquad (3)$$

Ἄρα,
$$q(z) = e^{\varphi(z)}.$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἕπεται τό ἀκόλουθον:

Πόρισμα IX-4-1. Ἐάν ἡ $q(z)$ εἶναι μία ἀκεραία συνάρτησις μέ ἕνα πεπερασμένον ἀριθμόν μηδενιζόντων (ριζῶν) καί ἐάν $P(z)$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον τό ὁποῖον ἔχει τάς αὐτάς ρίζας μέ τήν $q(z)$ καί ἑκάστην μέ τόν αὐτόν βαθμόν πολλαπλότητος, τότε

$$q(z) = P(z)\cdot e^{\varphi(z)}$$

Ἀπόδειξις: Αὐτό ἕπεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ἐάν θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν $\frac{q(z)}{P(z)}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκεραία συνάρτησις ἄνευ ριζῶν.

Ἐφαρμόζοντες ὁμοίως τό ἀνωτέρω θεώρημα ἔχομεν τό κάτωθι:

Πόρισμα IX-4-2. Ἐάν αἱ συναρτήσεις $g(z)$ καί $h(z)$ εἶναι ἀκέραιαι καί ἔχουν τούς αὐτούς μηδενίζοντας (ρίζας) καί μέ τήν αὐτήν τάξιν πολλαπλότητος, τότε

$$g(z) = h(z)\, e^{\varphi(z)} ,$$

ὅπου $\varphi(z)$ εἶναι ἀκεραία συνάρτησις.

§5. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΜΙΑΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΕΝΑ ΑΠΕΙΡΟΓΙΝΟΜΕΝΟΝ

(Θεώρημα τοῦ Weierstrass).

I. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει τήν ρίζαν $z=0$ πολλαπλότητος m (m: δύναται νά εἶναι καί μηδέν) καί τάς ρίζας $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (τυχόν πολλαπλαί ρίζαι ἐπαναλαμβάνονται τόσας φοράς ὅσας δηλοῖ ἡ πολλαπλότης των). Τότε ἡ $f(z)$ δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad (1)$$

ὅπου $g(z)$ ἀκεραία συνάρτησις.

Τό ἀνωτέρω συμπέρασμα δύναται νά γενικευθῆ.

II. Θεώρημα IX-5-1. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει τάς ρίζας $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ καί ἐπί πλέον $a_n \neq 0$, $n=1,2,3,\ldots$ καί εἶναι τοιαῦται, ὥστε $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ καί ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ συγκλίνει, τότε:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad (2)$$

ὅπου $g(z)$ ἀκεραία συνάρτησις.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ συγκλίνει, ἕπεται ὅτι καί τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$, κατά τό θεώρημα IX-3-1, συγκλίνει καί μάλιστα ἀπολύτως καί ὁμαλῶς πρός μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν $h(z)$, ἤτοι:

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

καί ἡ ὁποία ἔχει τά σημεῖα a_n, $n=1,2,\ldots$ ὡς ρίζας καί μάλιστα ἁπλάς.

Συμφώνως δέ πρός τήν Πρότασιν IX-4-1 διά τάς συναρτήσεις $f(z)$ καί $h(z)$ θά έχωμεν:

$$f(z)=e^{q(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

όπου $q(z)$ ακεραία συνάρτησις.

Παρατήρησις: Μέ τάς υποθέσεις τοῦ ανωτέρω θεωρήματος, εάν ή $f(z)$ έχη καί τήν ρίζαν $z=0$ μέ βαθμόν πολλαπλότητος m, τότε ή $f(z)$ γράφεται:

$$\boxed{f(z)=z^m\cdot e^{q(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right).} \qquad (2')$$

III. Θεώρημα IX-5-2. (Weierstrass). Έστω a_n, $n=1,2,\ldots$ είναι μία ακολουθία μιγαδικῶν αριθμῶν μέ $a_n\neq 0$ καί $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. Κάθε ακεραία συνάρτησις $f(z)$ μέ ρίζας μόνον τούς αριθμούς a_n καί ουχί άλλας δύναται νά γραφῆ υπό τήν μορφήν:

$$\boxed{f(z)=e^{q(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdot e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}}} \qquad (1)$$

όπου τό γινόμενον ελήφθη δι' όλα τά $a_n\neq 0$ καί k_n είναι ωρισμένοι ακέραιοι τοιοῦτοι, ώστε ή σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}$ (2) νά συγκλίνη δι' όλα τά z καί $q(z)$ είναι μία ακεραία συνάρτησις.

Παρατήρησις: Μέ τάς υποθέσεις τοῦ ανωτέρω θεωρήματος, εάν ή $f(z)$ έχη τήν ρίζαν $z=0$ μέ βαθμόν πολλαπλότητος m, τότε ή $f(z)$ δύναται νά τεθῆ υπό τήν μορφήν:

$$\boxed{f(z)=z^m\cdot e^{q(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}}} \qquad (1')$$

Προκειμένου ν' αποδείξωμεν τό θεώρημα θά στηριχθοῦμεν είς τά κάτωθι λήμματα:

Λῆμμα IX-5-1. Εάν $a_n\neq 0$ διά $n=1,2,3,\ldots$ καί $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, τότε υπάρχει μία ακολουθία $\{k_n\}$, $n\geq 1$ μή αρνητικῶν ακεραίων τοιαύτη, ώστε ή σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n} \qquad (3)$$

νά συγκλίνη ὁμαλῶς εἰς κάθε κύκλον $K(0,R)$, $R<\infty$.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ, π.χ, νά θέσωμεν $K_n = n-1$. Πράγματι ἐπειδή $|a_n| \geq 2R$ διά n ἀρκούντως μεγάλο, τότε δι' ὅλα αὐτά τά n καί διά $|z| \leq R$ θά ἔχωμεν:

$$\left|\frac{z}{a_n}\right|^{K_n+1} = \left|\frac{z}{a^n}\right|^n \leq \left(\frac{R}{2R}\right)^n = \frac{1}{2^n},$$

τό ὁποῖον ἀποδεικνύει τήν ὁμαλήν σύγκλισιν τῆς (3).

Ἀκολούθως εἰσάγομεν τήν συνάρτησιν:

$$E_K(z) = (1-z)\cdot \exp\left\{z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{1}{K}z^K\right\}, \quad (4) \quad \text{ὅπου } K = 1, 2, 3, \ldots$$

Ἐπί πλέον δεχόμεθα: $E_0(z) = 1-z$.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ἔχει μόνον μίαν ρίζαν τό σημεῖον $z=1$, ἐνῶ διά $z=0$ ἔχομεν: $E_K(0) = 1$.

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος οὐσιώδη ρόλο θά παίξη καί τό κάτωθι:

Λῆμμα IX-5-2. Διά τήν ὁρισθεῖσαν συνάρτησιν $E_K(z)$ ἔχομεν: $|E_K(z)-1| \leq 3|z|^{K+1}$ (5) διά $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Ἀπόδειξις: Διά $K=0$ ἡ ἀνισότης εἶναι προφανής. Ἐάν ἤδη $K \geq 1$ καί $|z|<1$, ἔχομεν: $1-z = \exp\log(1-z) = \exp\left(-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots\right)$.

Συνεπῶς, $E_K(z) = \exp q_K(z)$, ὅπου $q_K(z) = -\sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$.

Ὅθεν, ἐάν ὑποθέσωμεν ἐπί πλέον ὅτι $|z| \leq \frac{1}{2}$, τότε θά ἔχωμεν:

$$|q_K(z)| \leq \sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=K+1}^{\infty}|z|^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{|z|^{K+1}}{1-|z|} \leq |z|^{K+1} \qquad (6)$$

Διά τήν ἀπόδειξιν τῆς ἀνισότητος (1) θά χρησιμοποιήσωμεν τάς κάτωθι δύο ἀνισότητας:

$$|e^z-1| \leq e^{|z|}-1, \quad e^x-1 \leq x\,e^x \qquad (7)$$

ὅπου z παριστᾶ ἕναν τυχόντα μιγαδικόν ἀριθμόν καί x ἕναν τυχόντα πραγματικόν ἀριθμόν.

Διά τήν ἀπόδειξιν τῆς πρώτης π.χ, τούτων ἀρκεῖ ν' ἀναπτύξωμεν κατά Taylor τήν e^z-1 καί ἐν συνεχεία νά λάβωμεν τάς ἀπολύτους τιμάς.

Ἀκολούθως, λόγῳ τῶν (6) καί (7), λαμβάνομεν:

$$|E_K(z)-1| = |e^{q_K(z)}-1| \leq e^{|q_K(z)|}-1 \leq |q_K(z)|\,e^{|q_K(z)|} \leq |z|^{K+1}\cdot e^{|z|^{K+1}} \leq 3|z|^{K+1},$$

ἐπειδή $e^{|z|^{K+1}} < e < 3$, διά $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Ἀπόδειξις (τοῦ θεωρήματος). Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν §4 ἀρκεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ παράγων τοῦ $e^{g(z)}$ εἰς τὴν σχέσιν (1) τοῦ θεωρήματος IX-5-2 παριστᾷ μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν μὲ τὰς καθορισμένας ρίζας. Λαμβάνοντες ἐπίσης ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (4) τὴν ὁρίζουσα τὴν συνάρτησιν $E_k(z)$ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὸν τὸν παράγοντα οὕτω:

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \qquad (8)$$

Εἶναι ὅμως, $E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) = 1 + \left\{ E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1 \right\}$ (9)

Τὸ ἀπειρογινόμενον (8) διὰ νὰ συγκλίνῃ ὁμαλῶς εἰς τὸ (ἀνοικτὸν) μιγαδικὸν ἐπίπεδον πρὸς μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν, πρέπει ἡ σειρὰ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1 \right| \qquad (10),$$

νὰ συγκλίνῃ ὁμαλῶς εἰς κάθε ἀνοικτὸν κύκλον $k(0,R)$.

Ἤδη, ἐὰν $|z| \leq R$, τότε δι' ὅλα τὰ n τὰ μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἀπὸ ἕναν ὡρισμένο n_0 θὰ ἔχωμεν $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}$. Ἀκολούθως ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνισότητα (5) τοῦ Λήμματος IX-5-2 παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $n \geq n_0$ οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (10) θὰ εἶναι μικρότεροι ἢ ἴσοι ἀπὸ τοὺς ὅρους $3\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}$. Οὕτω ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}$ καὶ ἡ ὁποία βάσει τοῦ Λήμματος IX-5-1 συγκλίνει ὁμαλῶς διὰ $|z| \leq R$. Τὸ ὅτι ἡ συνάρτησις ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς (8) ἔχει τὰς προκαθορισμένας ρίζας εἶναι προφανές. Βάσει δὲ τοῦ Πορίσματος IX-4-2 διὰ τὴν ζητουμένην συνάρτησιν $f(z)$ θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \varphi(z),$$

ὅπου $g(z)$ τυχοῦσα ἀκεραία συνάρτησις.

Τὸ θεώρημα ὅθεν ἀπεδείχθη πλήρως.

Παρατήρησις Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τοῦ Weierstrass παίζει ἕναν βασικὸν ρόλον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων. Εἶναι ἀνάλογον τοῦ θεωρήματος τοῦ D'Alembert τῆς ἀναλύσεως ἑνὸς πολυωνύμου εἰς γινόμενον γραμμικῶν παραγόντων.

Ἄξιον προσοχῆς εἶναι, ὅτι ἡ ἀνάλυσις (1) ἢ (1′) δὲν εἶναι μονοσήμαντος, ἐπειδὴ ἡ ἀκολουθία $\{k_n\}$ δύναται νὰ ἐκλεγῆ κατὰ ποικίλους τρόπους.

Εἰδικῶς ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωσις, ὅταν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν διὰ τὴν $k_1, k_2, \dots k_n, \dots$ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν k. Αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ ὅταν ἡ σειρὰ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ εἶναι συγκλίνουσα. Ὁ παράγων $E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ καλεῖται ***στοιχειώδης παράγων*** καὶ ἡ ἀνάλυσις αὐτὴ καλεῖται ***ἀνάλυσις μιᾶς ἀκεραίας συναρτήσεως εἰς στοιχειώδεις παράγοντας***.

Κανονικὰ γινόμενα:

Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, ἐὰν ἡ σειρὰ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ εἶναι συγκλίνουσα, ὁ ἐλάχιστος μὴ ἀρνητικὸς ἀκέραιος k καλεῖται ***βαθμὸς*** τῆς ἀκολουθίας $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ καὶ ἐπίσης βαθμὸς τοῦ ἀντιστοίχου ***κανονικοῦ γινομένου*** (1) ἢ (1′). Ἐπὶ τοῦ προκειμένου ἂς λάβωμεν τὸ γινόμενον (1′), ὅτε τοῦτο γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\left\{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right\}} \qquad (11)$$

ὅπου m παριστᾶ τὴν τάξιν πολλαπλότητος τῆς ρίζης (ἐὰν ὑπάρχῃ) $z=0$ τῆς $f(z)$.

Τὸ ἀπειρογινόμενον λοιπὸν (11) συγκλίνει ἀπολύτως καὶ ὁμαλῶς ἐπὶ παντὸς φραγμένου συνόλου καὶ μηδενίζεται εἰς τὰ σημεῖα $z=0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, ὁ δὲ παράγων z^m παραλείπεται, ἐὰν ἡ $f(z)$ δὲν ἔχει ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $z=0$. Λαμβάνοντες δὲ τὴν λογαριθμικὴν παράγωγον τῆς (11), συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τῆς προτάσεως IX-3-7, εὑρίσκομεν:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \frac{m}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \dots + \frac{z^{k-1}}{a_n^k}\right\} \qquad (12)$$

Ἡ σειρὰ τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (12) συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς κάθε κλειστὸν καὶ φραγμένον σύνολον, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει τὰς ρίζας τῆς $f(z)$.

§ 6. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΗΣ $f(z) = \eta\mu\pi z$.

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f(z) = \eta\mu\pi z$. Αὐτὴ εἶναι μία ἀκεραία συνάρτησις, ἡ

ὁποία μηδενίζεται εἰς τὰ σημεῖα $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ καὶ ἐπειδὴ ἡ σειρά:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (1)$$

(ὁ τόνος εἰς τὸ $\sum$ δηλοῖ ὅτι εἰς τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ὁ ὅρος διὰ $n=0$ παραλείπεται) εἶναι συγκλίνουσα, ὁ βαθμὸς τῆς ἀκολουθίας τῶν ριζῶν τῆς ημπz εἶναι $k=1$. Οὕτω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, λόγῳ τοῦ τύπου (11):

$$\eta\mu\pi z = e^{g(z)} z \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \qquad (2)$$

Συσχετίζοντες ἀνὰ δύο τοὺς παράγοντας τοῦ ἀνωτέρω γινομένου καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ἐκθετικὸν μέρος αὐτοῦ εἶναι μηδέν, διότι οἱ ὅροι τοῦ ἐκθέτου ἀνὰ δύο εἶναι ἀντίθετοι, λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi z = e^{g(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (3)$$

Ἡ μόνη δυσκολία εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς συναρτήσεως $g(z)$. Λαμβάνοντες τὴν λογαριθμικὴν παράγωγον τῆς (3) εὑρίσκομεν:

$$\pi \cdot \sigma\varphi\pi z = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \qquad (4)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν (βλ. § 2, II, τύπος (8)) ὅτι:

$$\pi \cdot \sigma\varphi\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν: $g'(z) = 0$, ἐξ ἧς $g(z) = c$.

Ὁ τύπος λοιπὸν (3) γίνεται:

$$\eta\mu\pi z = c \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (6)$$

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν:

$$\frac{\eta\mu\pi z}{z} = c \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad (6')$$

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (6') διὰ $z \to 0$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\lim_{z \to 0} \frac{\eta\mu\pi z}{z} = \pi$, εὑρίσκομεν $c = \pi$.

Οὕτω ὁ (6) γράφεται:

$$\boxed{\eta\mu\pi z = \pi\cdot z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} \quad (7)$$

Τύπος τοῦ Euler

Ἐπανερχόμενοι εἰς τόν τύπον (2) καί θέτοντες $e^{g(z)}=\pi$ εὑρίσκομεν τόν τύπον

$$\boxed{\eta\mu\pi z = \pi\cdot z \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot e^{\frac{z}{n}}} \quad (8)$$

Τύπος τοῦ Weierstrass

Θέτοντες $z=\frac{1}{2}$ εἰς τόν τύπον (7) εὑρίσκομεν:

$$1=\frac{1}{2}\,\pi\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{1}{2}\,\pi\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{4n^2}$$

Καί κατ' ἀκολουθίαν ἔχομεν τόν σπουδαῖον τύπον τοῦ Wallis, ἤτοι:

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\pi=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots} \quad (9)$$

Τύπος τοῦ Wallis

§7. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ Γ.

Ἡ συνάρτησις ημπz ἔχει ὡς ρίζας ὅλους τούς ἀκεραίους καί εἶναι ἡ ἁπλουστάτη συνάρτησις πού ἔχει αὐτήν τήν ἰδιότητα. Ἤδη θά εἰσαγάγωμεν συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν μόνον θετικούς ἤ μόνον ἀρνητικούς ἀκεραίους ὡς ρίζας. Ἡ ἁπλουστάτη συνάρτησις ἡ ὁποία ἔχει ἀρνητικούς ἀκεραίους ὡς ρίζας εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τό κανονικόν γινόμενον, ἤτοι:

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdot e^{-\frac{z}{n}} \qquad (1)$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι ἡ συνάρτησις $G(-z)$ ἔχει τότε τούς θετικούς ἀκεραίους ὡς ρίζας καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (7) τῆς § 6 τόν δίδοντα τήν παραγοντοποίησιν τοῦ ημπz εὑρίσκομεν:

$$z\cdot G(z)\cdot G(-z)=\frac{\eta\mu\pi z}{\pi} \qquad (2)$$

Ἕνεκα τοῦ τρόπου κατασκευῆς τῆς $G(z)$ αὕτη εἶναι ἀναγκασμένη νά ὑπακούη εἰς ὡρισμένας ἰδιότητας. Οὕτω παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $G(z-1)$ ἔχει τάς αὐτάς ρίζας μέ τήν $G(z)$ καί ἐπί πλέον δέ αὕτη ἔχει καί τήν ρίζαν $z=0$. Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$G(z-1)=z\cdot e^{\gamma(z)}\cdot G(z) \qquad (3)$$

όπου ή $\gamma(z)$ εἶναι μία ἀκεραία συνάρτησις.

Προκειμένου δέ νά προσδιορίσωμεν τήν $\gamma(z)$ λαμβάνομεν τάς λογαριθμικάς παραγώγους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (3), ὅτε ἔχομεν:

$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \frac{G'(z)}{G(z)} \qquad (4) \qquad \text{ἤ}$$

$$\frac{d\log G(z-1)}{dz} = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \frac{d\log G(z)}{dz}$$

Εἶναι δέ, $\log G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdot e^{-\frac{z}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right\}$

ὅτε $$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{d\log G(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+\eta} - \frac{1}{\eta}\right\}$$

Ὁμοίως, $$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \cdots\cdots = \sum_{\eta=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-1+\eta} - \frac{1}{\eta}\right\}$$

Ἐπομένως ὁ τύπος (4) γίνεται:

$$\sum_{\eta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+\eta} - \frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+\eta} - \frac{1}{\eta}\right\} \qquad (5)$$

Εἰς τήν σειράν τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς (5) δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν τό η ὑπό τοῦ $\eta+1$, ὅτε αὕτη γράφεται:

$$\sum_{\eta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+\eta} - \frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{\eta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+\eta} - \frac{1}{\eta+1}\right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{\eta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+\eta} - \frac{1}{\eta}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta+1}\right) = 1$ καί κατά συνέπειαν ἡ σχέσις (5) μετά τάς ἀντικαταστάσεις καί τάς ἀναγωγάς γίνεται: $\gamma'(z) = 0$, ἐξ ἧς $\gamma(z) = \text{σταθ.}$ καί τήν ὁποίαν παριστῶμεν διά τοῦ γράμματος γ. Οὕτω ἡ σχέσις (3) γίνεται:

$$G(z-1) = e^{\gamma} z \cdot G(z) \qquad (6)$$

Ὁ προσδιορισμός τῆς σταθερᾶς γ ἡ ὁποία καλεῖται καί **σταθερά τοῦ Euler** γίνεται ὡς ἀκολούθως:

Θέτοντες $z=1$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (6)

$$1 = G(0) = e^{\gamma} G(1).$$

Συνεπῶς $$e^{-\gamma} = G(1) = \prod_{\eta=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\cdot e^{-\frac{1}{\eta}} \qquad (7)$$

Λαμβάνοντες τούς λογαρίθμους τῆς (7) εὑρίσκομεν:

$$-\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}+\log\frac{n+1}{n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

καί ἐπειδή $\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+1}{n}=0$ ἔχομεν:

$$\boxed{\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)} \qquad (8)$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι: $0<\gamma<1$, εἶναι δέ περίπου: $\gamma \simeq 0,57722\ldots$

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τήν συνάρτησιν:

$$H(z) = G(z)\cdot e^{\gamma z} \qquad (9)$$

ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τήν συναρτησιακήν ἐξίσωσιν $H(z-1) = z\,H(z)$ (10)

Παρατηροῦμεν ὅτι καί ἡ συνάρτησις:

$$\boxed{\Gamma(z) = {}^{1}/_{z}\cdot H(z)} \qquad (11)$$

ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν:

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1} \qquad \text{ἤ τήν ἐξίσωσιν}$$

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z)} \qquad (12)$$

Διά διαδοχικῶν ἐφαρμογῶν τοῦ τύπου (12) λαμβάνομεν:

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\cdots(z+n-1)\cdot\Gamma(z) \qquad (12').$$

Ἡ σχέσις (12) εἶναι λίαν χρήσιμος καί ἡ συνάρτησις (11), ὡς ὡρίσθη ἀνωτέρω, ἐπαληθεύει αὐτήν. Ἡ ὑπό τῆς (11) ὁριζομένη συνάρτησις καλεῖται ***συνάρτησις γάμμα τοῦ Euler*** καί συμβολίζεται μέ τό φερώνυμον γράμμα Γ. Πολλάκις ἡ σχέσις (12) λαμβάνεται διά νά ὁρίσωμεν μέσω αὐτῆς τήν συνάρτησιν Γ.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς σχέσεις (9) καί (11) καθώς καί τήν (1) εὑρίσκομεν τήν κάτωθι ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως Γ:

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}} \qquad (13)$$

Ἡ σχέσις (13) εἶναι ἀξιοσημείωτος, καθότι μᾶς παρέχει τήν ἔκφρασιν τῆς

συναρτήσεως Γ ὑπό μορφήν ἑνός ἀπειρογινομένου.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν σχέσιν (2), αὕτη τελικῶς λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\boxed{\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\eta\mu\pi z}} \qquad (14)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις Γ εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις μέ πόλους τά σημεῖα $z=0,-1,-2,\ldots$ ἀλλά ἄνευ ριζῶν.

Ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τήν ἀξιοσημείωτον σχέσιν (12).

Ἐπειδή $\Gamma(1)=\frac{1}{H(1)}=\frac{1}{H(0)}=\frac{1}{G(0)}=\frac{1}{1}=1$, ἐκ τῆς σχέσεως (12) λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$\Gamma(2)=1$, $\Gamma(3)=1\cdot 2$, $\Gamma(4)=1.2.3$ καί γενικῶς $\Gamma(\eta)=(\eta-1)!$

Ὅθεν:

$$\boxed{\Gamma(\eta)=(\eta-1)!} \qquad (15)$$

Ἐάν εἰς τήν σχέσιν (14) θέσωμεν $z=\frac{1}{2}$, εὑρίσκομεν:

$$\boxed{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}} \qquad (16)$$

Ἀκολούθως λαμβάνοντες τήν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $\log\Gamma(z)$, ὅπου ἡ $\Gamma(z)$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (13), εὑρίσκομεν:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\frac{d\log\Gamma(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2} \qquad (17)$$

<u>Τύπος τοῦ Gauss</u>: Ἀναχωροῦντες ἐκ τοῦ τύπου (13) καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τόν τύπον (8) ἔχομεν:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}e^{z\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\eta}-\log\eta\right)}\cdot z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\eta}\right)\cdot e^{-\frac{z}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{-z\log n}\cdot z\prod_{n=1}^{n}\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{z\cdot\left(1+\frac{z}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\eta^{z}}$$

Τελικῶς ἔχομεν τόν τύπον:

$$\boxed{\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{\eta!\,\eta^{z}}{z\cdot(z+1)\cdots(z+\eta)}} \qquad (18)$$

Ὑποθέτοντες ὅτι, $z\neq 0,-1,-2,\ldots$

Ὁ τύπος (18) καλεῖται *τύπος τοῦ Gauss*.

Εἶναι εὔκολον νά ὑπολογίσωμεν τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον τῆς $\Gamma(z)$ εἰς

ἕναν πόλον αὐτῆς. Οὕτω, ἐάν m παριστᾶ ἕναν μή ἀρνητικόν ἀκέραιον, τότε βάσει τοῦ τύπου (12') ἔχομεν:

$$(z+m)\cdot\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+m+1)}{z\cdot(z+1)\cdots(z+m-1)}$$

Ὑποθέτοντες ὅτι $z\longrightarrow -m$ ἔχομεν:

$$(z+m)\,\Gamma(z)\longrightarrow\frac{\Gamma(1)}{(-m)\cdot(-m+1)\cdots(-1)}=\frac{(-1)^m}{m!}$$

Αὐτό τό ἀποτέλεσμα εἶναι ἐπίσης ἀληθές καί διά $m=0$. Οὕτω:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=-m}\Gamma(z)=\frac{(-1)^m}{m!}}\qquad (19),\ m=0,1,2,\dots$$

<u>Χαρακτηρισμός τῆς συναρτήσεως Γ</u>.

Ἐάν ἐφαρμόσωμεν διαδοχικῶς τήν σχέσιν (12), λαμβάνομεν:

$$\Gamma(z+n)=z\cdot(z+1)\dots(z+n-1)\cdot\Gamma(z)$$

Λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\Gamma(n)=(n-1)!$ θά ἔχωμεν:

$$\frac{\Gamma(z+n)}{n^z\cdot\Gamma(n)}=\frac{z\cdot(z+1)\cdots(z+n-1)\cdot\Gamma(z)}{n^z\cdot(n-1)!}=\frac{z\cdot(z+1)\cdots(z+n-1)}{n^{z-1}\cdot n!}\cdot\Gamma(z).$$

Ὑποθέτομεν ὅτι $n\uparrow\infty$ καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (18) τοῦ Gauss εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{n^z\cdot\Gamma(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z\cdot(z+1)\cdots(z+n-1)}{n^{z-1}\cdot n!}\cdot\Gamma(z)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}{n^z\cdot n!}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{z+n}\cdot\Gamma(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\cdot 1\cdot\Gamma(z)=1$$

Οὕτω:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{n^z\cdot\Gamma(n)}=1}\qquad (20)$$

Ἤδη θά ἀποδείξωμεν τό κάτωθι:

<u>Θεώρημα IX-7-1</u>. <u>Ὑπάρχει μία καί μόνον μία συνάρτησις</u> $F(z)$, <u>ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τάς ἐξισώσεις</u>:

$$F(1)=1 \qquad (i)$$

$$F(z+1)=z\cdot F(z) \qquad (ii)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(z+n)}{n^z\cdot F(n)}=1 \qquad (iii)$$

<u>ἀρκεῖ τό</u> z <u>νά εἶναι διάφορον ἀπό</u> $z=0,-1,-2,\dots$

'Απόδειξις: 'Εάν ἡ $F(z)$ εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (ii), τότε θά ἔχωμεν:

$$F(z+n) = z\,(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)\cdot F(z)$$

καί

$$F(n) = (n-1)\,!$$

Οὕτω, βάσει τῆς σχέσεως (iii), θά ἔχωμεν:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F(z+n)}{n!\cdot n^{z-1}} = F(z)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{z\cdot(z+1)\cdots(z+n-1)}{n!\; n^{z-1}} = \frac{F(z)}{\Gamma(z)}$$

Ὅθεν:

$$F(z) = \Gamma(z)$$

§ 8. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ Γ ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Θεωροῦμεν τό γενικευμένον ὁλοκλήρωμα α^{ου} εἴδους

$$\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{z-1}\,dt \quad (1)\,, \quad t: \text{πραγματικός ἀριθμός}.$$

Περί αὐτοῦ τοῦ ὁλοκληρώματος ἠσχολήθημεν εἰς τόν Α^{ον} τόμον Κεφάλ. XV, § 6 σελ. 545, εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό z ἦτο πραγματικός ἀριθμός.

Ἤδη θ' ἀποδείξωμεν ὅτι: 'Εάν τό z εἶναι μιγαδικός ἀριθμός μέ $Re z > 0$ τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει καί εἶναι μία ἀναλυτική συνάρτησις.

Πράγματι, τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα γράφεται

$$\int_0^1 e^{-t}\cdot t^{z-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t}\cdot t^{z-1}\,dt \qquad (2)$$

καί θ' ἀποδείξωμεν ὅτι, τά ἀνωτέρω ὁλοκληρώματα ὑπάρχουν.

Ὑποθέτομεν ὅτι τό $z = x+iy$ κινεῖται εἰς ἕνα τυχόν καί φραγμένον κλειστόν σύνολον. Τότε ὑπάρχει μία σταθερά M τοιαύτη, ὥστε $Re z \leq M$, ὅταν τό z κινεῖται εἰς τό ἀνωτέρω σύνολον καί οὕτω ἔχομεν:

$$|t^{z-1}| = t^{x-1}\cdot |t^{iy}| = t^{x-1} = t^{Re z-1} \leq t^{M-1} \quad (2)\,, \quad \text{ὅταν } t \geq 1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: $e^{-\frac{1}{2}t}\cdot t^{M-1} \longrightarrow 0$ τοῦ $t \to \infty$ καί ὡς ἐκ τούτου ὑπάρχει σταθερά B (ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ M) τοιαύτη, ὥστε $e^{-\frac{1}{2}t}\cdot t^{M-1} \leq B$ ἤ $t^{M-1} \leq B\cdot e^{\frac{1}{2}t}$ (3), ὅταν $t \geq 1$.

Ὅθεν, λόγω τῶν (2) καί (3), θά ἔχωμεν:

$$|e^{-t}\cdot t^{z-1}| \leq e^{-t}\cdot t^{M-1} \leq e^{-t}\cdot B\cdot e^{\frac{1}{2}t} \leq B\cdot e^{-\frac{1}{2}t} \qquad (4)$$

καί οὕτω λόγῳ τῆς (4) τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος (2) συγκλίνει ἀπολύτως καί ὁμαλῶς ἐπί τοῦ κλειστοῦ καί φραγμένου συνόλου.

Διά δέ τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος (2), ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό t ὑπό τοῦ t^{-1}, ἐπιτυγχάνομεν:

$$\int_1^{\infty} e^{-t^{-1}} \cdot t^{-z-1} \cdot dt \qquad (5)$$

Τό ὁλοκλήρωμα (5) προφανῶς δέν συγκλίνει ὅταν $Re z \leq 0$. Ἐάν ὅμως τό z κινεῖται εἰς ἕνα κλειστόν καί φραγμένον σύνολον τό ὁποῖον κεῖται δεξιά τοῦ μιγαδικοῦ ἄξονος, ἡ ἀνισότης $Re z \geq \xi$, ὅπου $\xi > 0$, προφανῶς ἰσχύει καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ἔχωμεν:

$$\left| e^{-t^{-1}} \cdot t^{-z-1} \right| \leq t^{\xi-1}, \text{ ὅταν } t \geq 1.$$

καί οὕτω τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα συγκλίνει ὁμαλῶς.

Ἕκαστον τῶν ὁλοκληρωμάτων (2), συμφώνως πρός τά γνωστά θά παριστᾶ μίαν ἀναλυτικήν συνάρτησιν εἰς τό χωρίον $Re z > 0$.

Ἐάν εἰς τό ὁλοκλήρωμα (1) θέσωμεν $z = n$, ὅπου n εἶναι φυσικός ἀριθμός, εὑρίσκομεν δι' ὁλοκληρώσεως:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{n-1} dt = (n-1)! = \Gamma(n).$$

(βλ. Τόμος Α^{ος}, Κεφ. XV, § 6 Ἰδιότης XV-6-1 καί Πόρισμα XV-6-1).

Ὡς ἐκ τούτου εἶναι φυσικόν νά ὁρίσωμεν:

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1}\, dt, Re z > 0} \qquad (6)$$

Διά $z = \frac{1}{2}$ λαμβάνομεν:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

<u>Θ' ἀποδείξωμεν λοιπόν τόν τύπον</u> (6)

Πρός τούτοις ἄς θέσωμεν:

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1} dt \qquad (7)$$

Βάσει τοῦ Πορίσματος VII-5-1 ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι $F(z)=\Gamma(z)$ εἰς τήν περίπτωσιν, ὅπου τό z εἶναι ἕνας τυχών πραγματικός ἀριθμός μεταξύ 0 καί 1, καθ' ὅτι ἡ περίπτωσις ὅταν $x\geq 1$ ἀνάγεται εἰς τήν προηγουμένην. Ἀρκεῖ λοιπόν δι' αὐτήν τήν περίπτωσιν νά ἀποδείξωμεν ὅτι πληροῦνται αἱ τρεῖς συνθῆκαι τοῦ Θεωρήματος IX-7-1.

Πράγματι, $F(1)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{1-1}\,dt=\int_0^\infty \frac{dt}{e^t}=1$

Εἶναι δέ: $F(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x}\,dt=x\cdot\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{x-1}\,dt=x\cdot F(x)$.

Καί οὕτω ἀληθεύει καί ἡ δευτέρα συνθήκη τοῦ Θεωρήματος.

Ἤδη:
$$F(x+\eta)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x+n-1}\,dt \qquad (8)$$

καί ἀντικαθιστῶντες τό t ὑπό τοῦ $\eta\cdot t$, ἡ (8) γράφεται:
$$F(x+\eta)=\eta^{x+n}\int_0^\infty e^{-nt}\cdot t^{x+n-1}\,dt$$

Ἐντεῦθεν,
$$\frac{F(x+n)}{F(n)\cdot n^{x}}=\frac{n^{x}}{\Gamma(n)}\cdot\int_0^\infty e^{-nt}\cdot t^{x+n-1}\,dt \qquad (9)$$

Προκειμένου λοιπόν νά ἀποδειχθῆ ἡ τρίτη συνθήκη τοῦ θεωρήματος IX-7-1, ἀρκεῖ νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό δεξιόν μέλος τῆς (9) τείνει πρός τήν μονάδα τοῦ $\eta\uparrow\infty$. Διά τήν ἀπόδειξιν τούτου ἀκολουθοῦμεν τήν μέθοδον τοῦ Pringsheim. Πρός τούτοις θεωροῦμεν τά ὁλοκληρώματα:
$$\Gamma(\eta)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{n-1}\,dt,\quad \Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{n}\cdot dt \qquad (10)$$

Ἀντικαθιστῶντες τό t ὑπό τοῦ ηt εὑρίσκομεν:
$$\eta^{-n}\cdot\Gamma(\eta)=\int_0^\infty e^{-nt}\cdot t^{n-1}\,dt \qquad (11)$$

$$\eta^{-n}\cdot\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-nt}\cdot t^{n}\cdot dt \qquad (12)$$

Ἤδη ὁλοκληροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ταυτότητος:

$$e^{-nt}\cdot t^{n-1} - e^{-nt}\cdot t^{n} = \frac{1}{n}\,\frac{d}{dt}\left(e^{-nt}\cdot t^{n}\right)$$

ἀπὸ 0 ἕως 1 καὶ οὕτω ἐπιτυγχάνομεν:

$$\int_0^1 e^{-nt}\cdot t^{n-1}dt - \int_0^1 e^{-nt}\cdot t^{n}dt = e^{-n}\cdot n^{-1} \qquad (13)$$

Ἐπειδὴ ἡ (11) γράφεται:

$$\int_0^1 e^{-nt}t^{n-1} + \int_1^\infty e^{-nt}t^{n-1}\,dt = \eta^{-n}\cdot\Gamma(\eta) \qquad (14)$$

Ἡ (14), λόγῳ τῆς (13), γράφεται:

$$\int_1^\infty e^{-nt}\cdot t^{n-1}dt + \int_0^1 e^{-nt}\cdot t^{n}\,dt = \eta^{-n}\cdot\Gamma(\eta) - e^{-n}\cdot \eta^{-1} \qquad (15)$$

Ἐπειδὴ ἡ (12) γράφεται:

$$\int_0^1 e^{-nt}\cdot t^{n}dt + \int_1^\infty e^{-nt}\cdot t^{n}\,dt = \eta^{-n}\cdot\Gamma(\eta) \qquad (16)$$

Ἡ (16), λόγῳ τῆς (13), δίδει:

$$\int_0^1 e^{-nt}t^{n-1}dt + \int_1^\infty e^{-nt}\cdot t^{n}\,dt = \eta^{-n}\cdot\Gamma(\eta) + e^{-n}\cdot\eta^{-1} \qquad (17)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι $0 < x < 1$, ὅτε θὰ εἶναι:

$$t^{n} < t^{x+n-1} < t^{n-1}, \quad \text{ὅταν } 0 < t < 1$$

καὶ

$$t^{n-1} < t^{x+n-1} < t^{n}, \quad \text{ὅταν } 1 < t .$$

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὰ ὁλοκληρώματα (15) καὶ (17) ἀντικαταστήσωμεν τὸ t^{n-1} καὶ t^{n} ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν t^{x+n-1} καὶ t^{x+n}, ἐπιτυγχάνομεν τὰς ἀνισότητας

$$\eta^{-n}\cdot\Gamma(\eta) - e^{-n}\cdot\eta^{-1} < \int_0^\infty e^{-nt}\cdot t^{x+n-1}\,dt < \eta^{-n}\cdot\Gamma(\eta) + e^{-n}\cdot\eta^{-1} \quad \text{ἢ}$$

$$1 - \frac{n^{n}\cdot e^{-n}}{n!} < \frac{n^{n}}{\Gamma(n)}\cdot\int_0^\infty e^{-nt}\cdot t^{x+n-1}\,dt < 1 + \frac{n^{n}\cdot e^{-n}}{n!}$$

Δεδομένου ὅτι: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n}\cdot e^{-n}}{n!} = 1$, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-nt}\cdot t^{x+n-1}\,dt = 1.$$

Όθεν,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x+n)}{F(n)\cdot n^x} = 1$$
Ούτω εδείχθη ότι ισχύει και ή τρίτη συνθήκη του Θεωρήματος IX-7-1 καί κατά συνέπειαν έχομεν $F(x) = \Gamma(x)$.

Συμπληρώματα καί ασκήσεις

1. Νά αποδειχθούν αί κάτωθι ταυτότητες:

i) $\frac{\pi}{\sigma\upsilon\nu \pi z} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)}{4z^2 - (2n-1)^2}$ ii) $\pi \cdot \varepsilon\varphi \pi z = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{(2n-1)^2 - 4z^2}$

iii) $\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}$ iv) $\frac{1}{\sinh \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z}{z^2 + n^2}$

2. Δείξατε ότι εντός του μοναδιαίου κύκλου ισχύει:
$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$$
καί επί πλέον τό ανωτέρω απειρογινόμενον συγκλίνει απολύτως.

3. Νά ευρεθούν τά πεδία συγκλίσεως τών κάτωθι απειρογινομένων:

i) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^n}{2^n})$ ii) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ iii) $\prod_{n=1}^{\infty} \sigma\upsilon\nu \frac{z}{n}$

4. Νά δειχθή ότι τό απειρογινόμενον:
$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) \cdot e^{-\frac{z}{n}}$$
συγκλίνει απολύτως καί ομαλώς επί παντός συμπαγούς συνόλου.

5. Δείξατε ότι τό απειρογινόμενον:
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\right] \quad (n^z = e^{z \cdot \log n})$$
συγκλίνει είς τό άνω ημιεπίπεδον $Re z > \frac{1}{2}$ καί συγκλίνει απολύτως είς κάθε ημιεπίπεδον $Re z > 1$.

6. Νά αποδειχθούν αί κάτωθι ταυτότητες:

i) $\sigma\upsilon\nu \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{2z}{2n+1}\right)^2\right]$ ii) $\sinh z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{z^2}{n^2 z^2}\right]$ iii) $\cosh \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right]$

iv) $e^{\pi z} - 1 = \pi z \cdot e^{\frac{\pi z}{2}} \prod (1 + \frac{z^2}{4n^2})$ v) $\cosh z - \sigma\upsilon\nu z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4})$

7. Δείξατε ὅτι:

$$\etaμ\,\pi(z+a) = e^{\pi z σφ \pi a} \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n+a}\right)\cdot e^{-\frac{z}{n+a}},$$

ὅπου a δέν εἶναι ἀκέραιος.

8. Δείξατε ὅτι:

$$(2n)! = 2^{2n}\cdot n!\,\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)/\sqrt{\pi}$$

9. Δείξατε διά x πραγματικόν ὅτι:

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x\cdot \sinh \pi x}$$

10. Ἐάν ψ(z) παριστᾶ τήν παράγωγον τοῦ $\log\Gamma(z)$, δείξατε ὅτι:

$$\psi(1-z)-\psi(z) = \pi\cdot σφ\,\pi z.$$

11. Δείξατε ὅτι:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{n^z\cdot\Gamma(n)} = 1$$

Ὑποδ: Χρησιμοποιήσατε τόν τύπον (18) τοῦ Gauss καθώς καί τόν τύπον (12').

12. Δείξατε ὅτι:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2z). \quad (\text{Τύπος τοῦ Legendre}).$$

Ἀπόδ: Εἶναι:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n+1/2)^2}$$

$$=4\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+2n+1)^2}\right] = 4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2z+m)^2} = 2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right)$$

Δι' ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = e^{az+b}\cdot\Gamma(2z). \quad (1)$$

ὅπου αἱ σταθεραί a καί b προσδιορίζονται:
Θέτοντες εἰς τήν (1) $z=1$, $z=\frac{1}{2}$ καί γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι $\Gamma(1\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ εὑρίσκομεν μετά τούς ὑπολογισμούς τελικῶς $a=-2\log 2$ καί $b=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2$.

13. Θέτοντες:

$$\Gamma(z,n)=\frac{n!\,n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdots(z+n)}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

δείξατε ὅτι:

$$\Gamma(z,n)=\frac{n^z\cdot\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(z)}{\Gamma(n+z+1)}$$

ἐν συνεχεία δείξατε ὅτι: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^z\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(n+z)}=1$.

14. Δείξατε ὅτι:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=2^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

15. Δείξατε τόν τύπον τοῦ Gauss:

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Gamma(z)=n^{z-\frac{1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right)$$

16. Διά $Re\{m\}>0$, $Re\{n\}>0$ ὁρίζομεν τήν συνάρτησιν:

$$B(m,n)=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt$$

Ἀκολούθως δείξατε ὅτι:

i) $B(m,n)=B(n,m)$ ii) $B(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

<u>Ἀπόδειξις (ii)</u>

Ὡς γνωστόν εἶναι $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt \;\; \forall\, z\in M$ μέ $Re z>0$

Θέτω $t=\tau^2$ ὁπότε: $\Gamma(z)=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}t^{2z-1}\,dt$ (1) ὁπότε διά $m\in M$ μέ $Re\{m\}>0$ καί $n\in M$ μέ $Re\{n\}>0$ θά εἶναι:

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n)=4\left(\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u^{2m-1}\,du\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-v^2}v^{2n-1}\,dv\right)=\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}\,u^{2m-1}\,v^{2n-1}\,du\,dv.$$

Θέτοντες $u=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $v=\rho\,\eta\mu\theta$ λαμβάνομεν:

$$\Gamma(m)\Gamma(n)=4\int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{\pi/2}e^{-\rho^2}\rho^{2(m+n)-1}\,\sigma\upsilon\nu^{2m-1}\theta\,\eta\mu^{2n-1}\theta\,d\rho\,d\theta=\left(2\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho^{2(m+n)-1}d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{2m-1}\theta\,\eta\mu^{2n-1}\theta\,d\theta\right)=$$

$=\Gamma(m+n)\,2\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{2m-1}\theta\,\eta\mu^{2n-1}\theta\,d\theta$ (2) (λόγω τῆς (1)). Θέτοντας δέ $\sigma\upsilon\nu^2\theta=t$ ἔχω:

$$2\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu^{2m-1}\theta\,\eta\mu^{2n-1}\theta\,d\theta=\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt=B(m,n) \quad (3)$$

Ὅθεν $\Gamma(m)\,\Gamma(n) = \Gamma(m+n)\,B(m,n)$, ἐξ ἧς ἡ ἀποδεικτέα.

17. Ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z}\cdot e^{-z}\left\{1+O(1)\right\}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος καλεῖται ***ἀσυμπτωτικός τύπος τοῦ Stirling διά τήν συνάρτησιν*** Γ. Ἐάν $z=n$ ἔχωμεν: $\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^{\theta/12n}$, ὅπου $0<\theta<1$.
Εἰδικῶς διά ἀρκούντως μεγάλο n ἔχομεν: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$.

Ἐφαρμογή 2α (συνεχεια τῆς σελ. 174). Τῆς συναρτήσεως $f(z) = e^{1/z}/(1-z)$ να εὑρεθοῦν τά ὁλοκληρωτικά ὑπόλοιπα εἰς τά ἀνώμαλα σημεῖα της.

Λύση: Τά ἀνώμαλα σημεῖα αὐτῆς τῆς συνάρτησης εἶναι τά $z=1$ καί $z=0$.

Τό $z=1$ εἶναι ἕνας ἁπλός πόλος καί ἔχουμε: $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \left.\dfrac{e^{1/z}}{-1}\right|_{z=1} = -e.$

Διά νά εὕρωμεν τό $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$ ἀναπτύσσουμε κατά Laurent τήν $f(z)$ πέριξ τοῦ $z=0$ καί ἔχομεν:

$$e^{1/z} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\cdots$$

Διά πολλαπλαπλασιασμοῦ τῶν ἀνωτέρων σειρῶν λαμβάνομεν:

$$\frac{e^{1/z}}{1-z} = \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots\right)\cdot\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)\cdot\frac{1}{z} + C_{-2}\frac{1}{z^2}+\cdots$$

$+$ τo κανονικό μέρος.

Παρατηροῦμεν ὅτι $C_{-k}\neq 0$, $K=2,3,\ldots$ Ἐπειδή τό πρωτεῦον μέρος τῆς κατά Laurent αναπτύξεως της συνάρτησης περιέχει ἕνα ἄπειρο ἀριθμό ὅρων μέ ἀρνητικές δυνάμεις του z, τό σημεῖο $z=0$ εἶναι ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλο σημεῖο τῆς συνάρτησης. Τό ὁλοκληρωτικό ὑπόλοιπο σ'αὐτό τό οὐσιῶδες ἀνώμαλο σημεῖο θα εἶναι κατά τά γνωστά.

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots = e-1.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΗΣ

§1. ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ

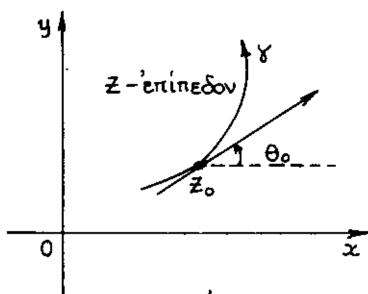
Ἔστω $w=f(z)$ μία συνάρτησις, ἡ ὁποία θεωρεῖται ἀναλυτική εἰς κάθε σημεῖον z ἑνός πεδίου G. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ λεία καμπύλη γ μέ ἐξίσωσιν: $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$, διέρχεται διά τοῦ σημείου z_0 τοῦ G καί ὅτι $f'(z)\neq 0$, διά κάθε $z\in G$. Ἡ $w=f(z)$ ἀπεικονίζει τήν γ εἰς μίαν καμπύλην, ἔστω Γ, τοῦ w-ἐπιπέδου καί ἡ ὁποία θά ἔχη ὡς ἐξίσωσιν τήν $w=f(z(t))$, $a\le t\le b$.

Ὡς γνωστόν θά ἔχωμεν:

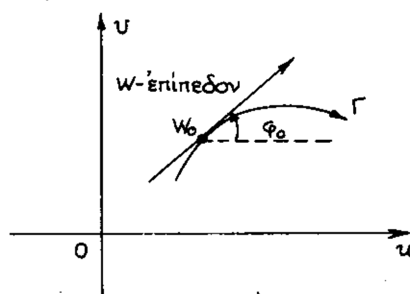
$$w'(t)=f_z'(z)\cdot z'(t) \qquad (1)$$

Ἐπειδή ἡ καμπύλη γ εἶναι λεία, θά εἶναι $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$ διά $a\le t\le b$, εἶναι δέ καί $f_z'(z)\neq 0$ κατά συνέπειαν, λόγω τῆς (1), θά εἶναι $w'(t)\neq 0$. Ἐκ τῆς (1) λοιπόν δυνάμεθα νά λάβωμεν:

$$\arg w'(t)=\arg f'[z(t)]+\arg z'(t) \qquad (2)$$



Σχ. 1α



Σχ. 1β

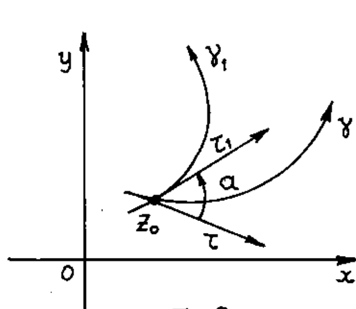
Ἔστω θ_0 ἡ γωνία κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς γ εἰς τό σημεῖον $z_0=z(t_0)$, $a<t_0<b$, εἶναι δέ αὕτη μία τιμή τοῦ $\arg z'(t_0)$. Ἐάν ψ_0 εἶναι μία τιμή τοῦ $\arg f'(z_0)$, τότε, συμφώνως πρός τήν (2), θά ἔχωμεν:

$$\varphi_0=\psi_0+\theta_0 \qquad (3)$$

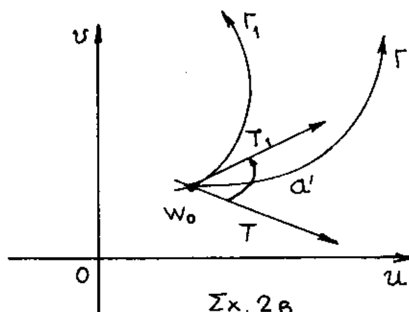
Ἡ (3) δίδει τήν τιμήν τοῦ $\arg w'(t_0)$ καί εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τῆς διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς Γ εἰς τό σημεῖον $w_0=f(z_0)$. Ὅθεν, <u>ὅταν ἡ</u>

συνάρτησις f εἶναι ἀναλυτική εἰς τό z_0 μέ $f'(z_0) \neq 0$, μία προσανατολισμένη ἐφαπτομένη μιᾶς λείας καμπύλης γ εἰς τό z_0 περιστρέφεται κατά τήν γωνίαν $\psi_0 = \arg f'(z_0)$ ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $W = f(z)$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἔχομεν ἐπί τοῦ πεδίου G τήν συνάρτησιν $W=f(z)$, ὡς ἀνωτέρω ὡρίσθη, καί ἔστωσαν γ καί γ_1 δύο λεῖαι καμπύλαι κείμεναι ἐντός τοῦ G καί διερχόμεναι διά τοῦ σημείου z_0 (βλ. Σχ. 2α).



Σχ. 2α



Σχ. 2β

Ἔστωσαν τ καί τ_1 αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων τούτων εἰς τό z_0 καί a ἡ γωνία τῶν καμπύλων ἡ ὁριζομένη ὑπό τῶν ἐφαπτομένων των τ καί τ_1 εἰς τό z_0 καί ἡ ὁποία μετρᾶται ἀπό τήν τ πρός τήν τ_1.

Θά εἶναι δέ $a = \theta_1 - \theta$, ὅπου θ_1, θ αἱ γωνίαι κλίσεως τῶν τ_1, τ μετά τοῦ οx. Ἔστωσαν δέ Γ καί Γ_1 αἱ εἰκόνες τῶν γ καί γ_1 ὑπό τῆς $W=f(z)$ (βλ. Σχ. 2β). Ἔστωσαν δέ T καί T_1 αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν Γ καί Γ_1 εἰς τό σημεῖον $W_0 = f(z_0)$. Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω, ἡ γωνία τῶν T καί T_1 μετρουμένη ὑπό τήν T πρός τήν T_1 θά εἶναι: $a' = \varphi_1 - \varphi$, ὅπου φ_1, φ αἱ γωνίαι κλίσεως τῶν T_1, T μετά τοῦ ἄξονος οu. Συμφώνως πρός τόν τύπον (3) θά ἔχωμεν:

$$a' = \varphi_1 - \varphi = \{\arg f'(z_0) + \theta_1\} - \{\arg f'(z_0) + \theta\} = \theta_1 - \theta = a.$$

<u>Ὁρισμός X-1-1</u>. *Μία ἀπεικόνισις ἡ ὁποία διατηρεῖ τά μέτρα καί τήν φοράν τῶν γωνιῶν μεταξύ δύο λείων καμπύλων διερχομένων δι' ἑνός καθωρισμένου σημείου, καλεῖται σύμμορφος ἀπεικόνισις εἰς τό σημεῖον τοῦτο.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τό ἀκόλουθον:

<u>Θεώρημα X-1-1</u>. <u>Ἐάν διά κάθε σημεῖον z τοῦ πεδίου G ἡ συνάρτησις f</u>

εἶναι ἀναλυτική καί $f'(z) \neq 0$, (δηλ. ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική καί ἁπλῆ), ἡ ἀπεικόνισις $w=f(z)$ εἶναι σύμμορφος.

Ἐάν κατά τήν ἀπεικόνισιν $w=f(z)$ διατηροῦνται ἁπλῶς τά μέτρα τῶν γωνιῶν τῶν καμπύλων ὄχι ὅμως ἀναγκαστικῶς καί αἱ «φοραί» τῶν γωνιῶν, τότε αὕτη θά καλεῖται *ἰσογώνιος ἀπεικόνισις*.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος προκύπτει τώρα ὅτι:

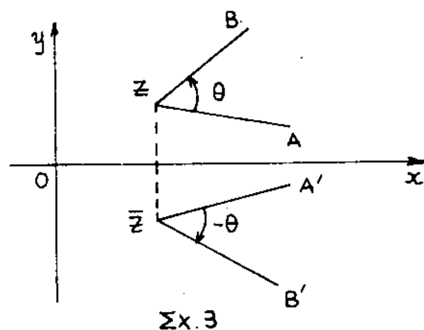
Πόρισμα X-1-1. Ἐάν αἱ εἰκόνες δύο καμπύλων ὑπό μιᾶς συμμόρφου ἀπεικονίσεως εἶναι ὀρθογώνιοι, τότε αἱ καμπύλαι αὗται εἶναι ὀρθογώνιοι.

• Ἐάν ἡ ἀπεικόνισις $w=f(z)$ εἶναι σύμμορφος εἰς τό σημεῖον z_0, τότε αὕτη θά ἔχη μίαν ἀντίστροφον εἰς μίαν περιοχήν τοῦ σημείου $w_0=f(z_0)$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν ἀνοικτά ὀρθογώνια G καί S μέ κέντρον τά z_0 καί w_0 ἀντιστοίχως, τοιαῦτα, ὥστε εἰς κάθε σημεῖον w τοῦ S ὑπάρχει ἕνα, καί μόνον ἕνα, σημεῖον z τοῦ G μέ τήν ἰδιότητα: $w=f(z)$. Ἡ ἀντίστροφος εἰκόνα παρίσταται διά τοῦ $z=g(w)$, εἶναι ἀναλυτική εἰς τό w_0 καί ἔχει παράγωγον διδομένη ὑπό τοῦ τύπου: $g'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}$.

Παράδειγμα 1ον. Ἡ ἀπεικόνισις $w=z^2$ εἶναι σύμμορφος διά κάθε $z\neq 0$, ἐπειδή ἡ παράγωγος $w'=2z$ δέν μηδενίζεται διά κάθε $z\neq 0$. Αὕτη δέν εἶναι σύμμορφος διά $z=0$. Πράγματι, ἐπειδή

$$\arg w=\arg z^2=2\arg z,$$

ἡ ἀπεικόνισις λοιπόν διπλασιάζει κάθε γωνίαν, τῆς ὁποίας αἱ πλευραί διέρχονται διά τῆς ἀρχῆς.



Σχ. 3

2ον. Ἡ ἀπεικόνισις $w=\bar{z}$ προφανῶς δέν εἶναι σύμμορφος, διότι διά κάθε $z\in C$ δέν ὑπάρχει ἡ παράγωγος αὐτῆς. Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη διατηρεῖ τά μέτρα τῶν γωνιῶν, οὐχί ὅμως καί τήν φοράν αὐτῶν, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ Σχ. 3.

3ον. Ἕνα λίαν ἀξιόλογον παράδειγμα συμμόρφου ἀπεικονίσεως εἶναι ὁ γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός

ήτοι : $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ μέ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Πράγματι εἶναι

$$S'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \text{ διά κάθε } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

§ 2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

Ἔστω $w = f(z)$ μία σύμμορφος ἀπεικόνισις ἀπεικονίζουσα τό πεδίον G εἰς τό πεδίον G^*. Τότε τό πεδίον G^* καλεῖται ***σύμμορφος εἰκόνα*** τοῦ πεδίου G ἤ ὅτι τό G ἀπεικονίζεται ***συμμόρφως*** ὑπό τῆς $w = f(z)$ εἰς τό G^*.

Πρότασις X-2-1. Ἐάν τό πεδίον G^* εἶναι μία σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G, τότε τό G εἶναι σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G^*. Ἐπί πλέον ἐάν G^* εἶναι μία σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G καί G^{**} εἶναι μία σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G^*, τότε τό G^{**} εἶναι σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G.

Ἀπόδειξις: Ἔστω $w = f(z)$ μία σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ G ἐντός τοῦ G^* μέ ἀντίστροφον τῆς $z = \varphi(w)$ καί ἔστω $\zeta = g(w)$ μία σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ G^* ἐντός τοῦ G^{**}. Ἡ $z = \varphi(w)$ θά εἶναι καί αὐτή, προφανῶς, μία σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ G^* ἐντός τοῦ G. Τέλος ἡ $\zeta = g(f(z))$ θά εἶναι σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ G ἐντός τοῦ G^{**}, ὡς σύνθεσις συμμόρφων ἀπεικονίσεων.

• Ἔστω G εἶναι ἕνας δίσκος ἤ ἕνα ἡμιεπίπεδον καί z_0 ἕνα σημεῖον τοῦ G. Ὡς γνωστόν, συμφώνως πρός τά παραδείγματα πού ἐξετάσαμεν εἰς τό Κεφάλαιον V, § 4, βλ. σχετική ἐφαρμογή, δυνάμεθα νά ἀπεικονίσωμεν τό ἐν λόγῳ χωρίον συμμόρφως δι' ἑνός γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - cb \neq 0$ εἰς τόν μοναδιαῖον κύκλον $|w| < 1$, ὁ ὁποῖος νά πληροῖ τάς συνθήκας $S(z_0) = 0$, $S'(z_0) \neq 0$.

Τό ἀνωτέρω δυνάμεθα νά τό γενικεύσωμεν διά τοῦ κατωτέρω θεμελιώδους θεωρήματος, τό ὁποῖον δέν ἀποδεικνύομεν.

Θεώρημα X-2-1. (Riemann) Ἔστω G ἕνα ἁπλό καί συνεκτικόν πεδίον εἰς τό ἐπεκτεταμένον μιγαδικόν ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου τό σύνορον περιέχει περισσότερα ἀπό ἕνα σημεῖα καί ἔστω z_0 εἶναι ἕνα σημεῖον του G. Τότε ὑπάρχει

μία ἀναλυτική καί ἁπλῆ συνάρτησις $w=f(z)$, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τό G συμμόρφως ἐντός τοῦ δίσκου $|W|<1$ καί ἐπί πλέον νά ἱκανοποιῇ τάς συνθήκας $f(z_0)=0$ καί $f'(z_0)>0$.[1]

Παρατήρησις: Ἡ ὑπόθεσις ὅτι τό σύνορον τοῦ G πρέπει νά περιέχῃ περισσότερα ἀπό ἕνα σημεῖα εἶναι ἀπαραίτητος. Πράγματι, ἐάν Π_{z_0} παριστᾷ ὁλόκληρον τό ἐπεκτεταμένον μιγαδικόν ἐπίπεδον ἐξαιρέσει τοῦ σημείου z_0 καί ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $W=f(z)$ εἶναι μία σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ Π_{z_0} ἐντός τοῦ δίσκου $|W|<1$, τότε καί ἡ συνάρτησις $g(z)=f\left(\frac{1}{z}+z_0\right)$ εἶναι μία σύμμορφος ἀπεικόνισις ὁλοκλήρου τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου Π_∞ ἐντός τοῦ ἰδίου δίσκου. Ἀλλά μία τοιαύτη συνάρτησις δέν δύναται νά ὑπάρχῃ, διότι ἐάν $|g(z)|<1$ διά κάθε πεπερασμένον z, τότε ἡ $g(z)$ εἶναι μία φραγμένη ἀκεραία συνάρτησις καί συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ Liouville αὕτη θά εἶναι σταθερά. Ὅθεν, μία τοιαύτη συνάρτησις δέν δύναται νά εἶναι σύμμορφος.

Τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος τοῦ Riemann δυνάμεθα νά ἔχωμεν τήν κάτωθι γενίκευσιν.

Θεώρημα X-2-2. Ἔστωσαν G καί G^* εἶναι δύο ἁπλᾶ συνεκτικά χωρία ἐπί τοῦ ἐπεκτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἕνα σύνορον περιέχον περισσότερα ἀπό ἕνα σημεῖα. Ἔστω z_0 εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ G καί W_0 ἕνα σημεῖον τοῦ G^*. Τότε ὑπάρχει μία ἀναλυτική καί ἁπλῆ συνάρτησις $W=f(z)$, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει συμμόρφως τό G εἰς τό G^* καί ἐπί πλέον ἱκανοποιεῖ τάς συνθήκας:

$$f(z_0)=W_0\,,\ f'(z_0)>0.$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω K ὁ δίσκος $|\zeta|<1$ καί ἔστω $\zeta=g(z)$ μία σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ G ἐντός τοῦ K τοιαύτη, ὥστε $g(z_0)=0$, $g'(z_0)>0$. Προφανῶς ἡ ἀπεικόνισις αὕτη ἔχει μίαν ἀντίστροφον, ἔστω τήν $z=\varphi(\zeta)$.

Ἔστω $\zeta=h(w)$ εἶναι ἡ σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ G^* ἐντός τοῦ K τοιαύτη, ὥστε:

$$h(W_0)=0,\ h'(W_0)>0$$

---

1) Ἡ συνθήκη $f'(z_0)>0$ ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά γράψωμεν $\arg f'(z_0)>0$.

Ἔστω δὲ $W=\psi(\zeta)$ ἡ ἀντίστροφος τῆς $\zeta=h(W)$· τότε θὰ ἔχωμεν προφανῶς:

$$\psi(0)=W_0 \quad \text{καὶ} \quad \psi'(0)=\frac{1}{h'(W_0)}>0.$$

Ἡ ἀπεικόνισις $W=\psi(\zeta)=\psi(g(z))\equiv f(z)$, εἶναι μία σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ G ἐντὸς τοῦ G^* τοιαύτη, ὥστε:

$$f(z_0)=\psi(g(z_0))=\psi(0)=W_0$$

καὶ $f'(z_0)=\psi'(g(z_0))\cdot g'(z_0)=\psi'(0)\cdot g'(z_0)=\dfrac{g'(z_0)}{h'(W_0)}>0.$

§ 3. ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΜΜΟΡΦΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

I. Θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν:

$$W=f(z)=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})=\cosh x\,\sigma\upsilon\nu y+i\sinh x\,\eta\mu y \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $f'(z)=0$, ὅταν $z=\eta\pi i$, ὅπου $\eta=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις εἶναι σύμμορφος μόνον εἰς τὰ πεδία ποὺ δὲν περιέχουν τὰ ἀνωτέρω σημεῖα. Αὐτὴ εἶναι περιοδικὴ ὡς πρὸς y μὲ περίοδον 2π· ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν $\cosh(-z)=\cosh z$. Ὅθεν, ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐπὶ ἑκάστου πεδίου, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει δύο σημεῖα z_1, z_2 τοιαῦτα, ὥστε $z_1-z_2=2\eta\pi i$ μὲ $\eta=0,1,2,\ldots$

Θεωροῦντες τὸ W-ἐπίπεδον καὶ θέτοντες $W=u+iv$ θὰ ἔχωμεν, λόγῳ τῶν (1):

$$\left.\begin{aligned} u&=\cosh x\,\sigma\upsilon\nu y\\ v&=\sinh x\,\eta\mu y\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 x}+\frac{v^2}{\sinh^2 x}=\sigma\upsilon\nu^2 y+\eta\mu^2 y=1 \qquad (3)$$

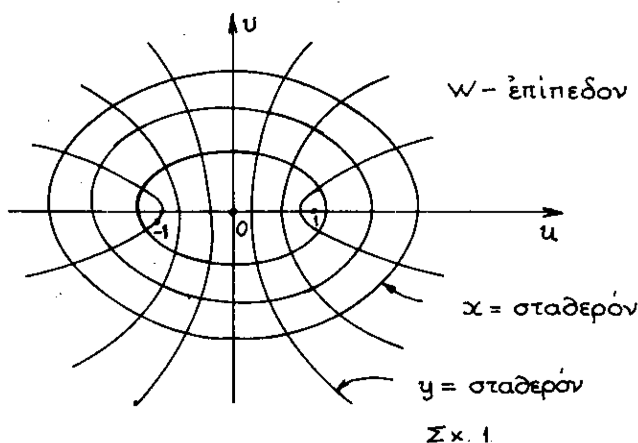
Οὕτω κάθε εὐθεῖα $x=\sigma\tau\alpha\theta.$ μετασχηματίζεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς μίαν ἔλλειψιν μὲ μεγάλον ἄξονα τὸν $\cosh x$ κατὰ τὴν u-διεύθυνσιν καὶ μικρὸν ἄξονα τὸν $|\sinh x|$ κατὰ τὴν v-διεύθυνσιν.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{u^2}{\sigma\upsilon\nu^2 y}-\frac{v^2}{\eta\mu^2 y}=\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \qquad (4)$$

Οὕτω κάθε εὐθεῖα $y=\sigma\tau\alpha\theta.$ μετασχηματίζεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς μίαν ὑπερβολὴν τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν u εἰς τὰ σημεῖα $\pm\sigma\upsilon\nu y$ καὶ ἔχουσα ἀσυμπτώτους τὰς $u=\pm(\varepsilon\varphi y)\,v$.

Αἱ εἰκόνες τῶν εὐθειῶν x=σταθ. καὶ y=σταθ. τοῦ z-ἐπιπέδου ὑπό τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς τό W-ἐπίπεδον παρέχονται ὑπό τοῦ Σχ. 1.



Σχ. 1

II. Θεωροῦμεν τόν μετασχηματισμόν:

$$W = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (1)$$

ὅστις καλεῖται *μετασχηματισμός τοῦ Joukowski*.

Ἔχομεν: $$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \qquad (2)$$

Ὅθεν, $$f'(z) \neq 0, \text{ ἐάν } z \neq \pm 1$$

Ὁ ἀνωτέρω λοιπόν μετασχηματισμός εἶναι μία σύμμορφος ἀπεικόνισις τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$ ἐντός τοῦ ἰδίου.

Εἰς τό σύστημα πολικῶν συντεταγμένων ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} z &= r\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta),\ r>0 \\ \text{ὅτε} \quad \frac{1}{z} &= \frac{1}{r}\,(\text{συν}\theta - i\,\text{ημ}\theta) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ἔστω $W = u + iv$ ἐπί τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων Ou, Ov.

Λόγω τῶν (3) θά ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\text{συν}\theta \\ v &= \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\text{ημ}\theta \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

i) Ἡ εἰκόνα τοῦ κύκλου $|z| = r$ θά εἶναι ἡ ἔλλειψις μέ ἡμιάξονας $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ καί $b = \frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$ ἐπί τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων Ou, Ov ἀντιστοίχως.

Διά $r = 1$ εἶναι $b = 0$ καί ἡ εἰκόνα τοῦ $|z| = 1$ εἶναι τό τμῆμα $[-1, +1]$ διαγραφόμενον δύο φοράς.

Διά $r \neq 1$ ἐπιτυγχάνομεν τήν ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας αἱ ἑστίες δίδονται ὑπό τῶν σχέσεων:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1, \text{ ἤτοι εἶναι τά σημεῖα } \pm 1.$$

Διά τάς τιμάς r καί $\frac{1}{r}$ ἐπιτυγχάνομεν τήν αὐτήν ἔλλειψιν.

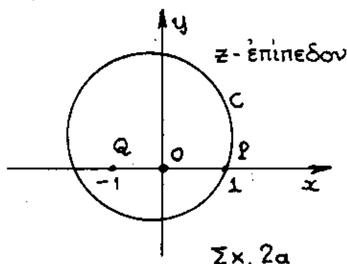
ii) Ἡ εἰκόνα τῆς ἡμιευθείας $\theta = \theta_0$ διερχομένη διά τῆς ἀρχῆς Ο θά εἶναι ἡ καμπύλη μέ ἐξίσωσιν:

$$\frac{u^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta_0} - \frac{\upsilon^2}{\eta\mu^2\theta_0} = 1, \text{ μέ } u \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_0 > 0 \qquad (5)$$

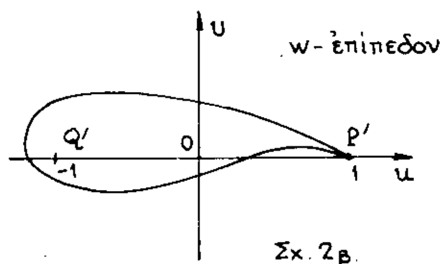
ἤτοι διά $\theta_0 \neq \pm\frac{\pi}{2}$ εἶναι ἕνας κλάδος ὑπερβολῆς μέ ἑστίαν τό $+1$, ἐάν $\sigma\upsilon\nu\theta_0 > 0$ καί ἑστία τό -1, ἐάν $\sigma\upsilon\nu\theta_0 < 0$ καί ἀσυμπτώτους τάς ἡμιευθείας $\theta = \pm\theta_0$.
Διά $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ εἶναι ὁ ἄξων ου.

Ἐπειδή οἱ κύκλοι $|z| = r$ καί αἱ ἡμιευθεῖαι $\theta = \theta_0$ τέμνονται ὀρθογωνίως καί ἡ ἀπεικόνισις εἶναι σύμμορφος, ἕπεται ὅτι αἱ ἐλλείψεις καί αἱ ὑπερβολαί ἑστιῶν $+1$ καί -1 τέμνονται ὀρθογωνίως.

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός ἔχει ἐφαρμογήν εἰς τήν Μηχανικήν τῶν ρευστῶν, διότι ὡρισμένοι κύκλοι διερχόμενοι διά μιᾶς τῶν ἑστιῶν $+1$ ἤ -1 ἔχουν ὡς εἰκόνα καμπύλην ὁμοιάζουσαν πρός τήν κάτοψιν πτέρυγος ἀεροπλάνου. (βλ. Σχ. 2α καί Σχ. 2β).



Σx. 2α



Σx. 2β

§4. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ SCHWARTZ-CHRISTOFFEL

Διά τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel θά ἐπιτύχωμεν μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος x καθώς καί τοῦ ἡμιεπιπέδου $\mathrm{Im}\, z > 0$ ἐντός ἑνός δοθέντος κλειστοῦ πολυγώνου καί τοῦ ἐσωτερικοῦ του τοῦ w-ἐπιπέδου.

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός εὑρίσκει ἐφαρμογάς εἰς προβλήματα τῆς ροῆς τῶν ρευστῶν, ἠλεκτροστατικοῦ ἠλεκτρισμοῦ καθώς καί τῆς θεωρίας δυναμικοῦ.

I. **Ἀπεικόνισις τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος ἐπί ἑνός πολυγώνου.**

Θά παραστήσωμεν τό μοναδιαῖον ἐφαπτομενικόν διάνυσμα ἑνός λείου προσανατολισμένου τόξου C εἰς τό σημεῖον z_0 ὑπό τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $t(|t|=1)$. Ἔστω ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός τ $(|\tau|=1)$ παριστᾶ τό μοναδιαῖον ἐφαπτομενικόν διάνυσμα τῆς εἰκόνος Γ τῆς C ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $W=f(z)$ εἰς τό ἀντίστοιχον σημεῖον $W_0=f(z_0)$. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό σημεῖον z_0 καί ὅτι $f'(z_0)\neq 0$ (δηλ. ἔχομεν σύμμορφον ἀπεικόνισιν). Συμφώνως πρός τήν §1 βλ. τύπον (2) θά ἔχωμεν:

$$\arg\tau=\arg t+\arg f'(z_0) \qquad (1)$$

Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν ὅπου ἡ C εἶναι ἕνα τμῆμα τοῦ ἄξονος τῶν x μέ θετικήν φοράν πρός τά δεξιά, τότε $t=1$ καί ὡς ἐκ τούτου $\arg t=0$ εἰς κάθε σημεῖον $z_0=x$ ἐπί τῆς C.

Ὅθεν ἡ σχέσις (1) γράφεται δι' αὐτήν τήν περίπτωσιν:

$$\arg\tau=\arg f'(x) \qquad (2).$$

Ἐάν ἡ $f'(z)$ ἔχῃ σταθερόν ὅρισμα κατά μῆκος αὐτοῦ τοῦ τμήματος, ἕπεται ὅτι τό $\arg\tau$ εἶναι σταθερόν, αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ εἰκών Γ τῆς C εἶναι ἐπίσης ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ἤδη προτιθέμεθα νά κατασκευάσωμεν ἕναν μετασχηματισμόν $W=f(z)$ ὁ ὁποῖος νά ἀπεικονίζῃ ὁλόκληρον τόν ἄξονα x ἐπί ἑνός πολυγώνου ἔχοντος n-πλευράς, ὅπου $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$ καί $z=\infty$ εἶναι τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ ἄξονος καί ὁ ὁποῖος (μετασχηματισμός) νά ἀπεικονίζῃ τά ἀνωτέρω σημεῖα εἰς τάς κορυφάς αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου.

Αἱ κορυφαί λοιπόν τοῦ πολυγώνου θά εἶναι τά σημεῖα $W_j=f(x_j)$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$ καί $W_n=f(\infty)$.

Ἡ συνάρτησις f πρέπει νά εἶναι τοιαύτη, ὥστε τό $\arg f'(z)$ νά πηδᾶ ἀπό μία σταθερά τιμή εἰς μίαν ἄλλην σταθεράν τιμήν εἰς τά σημεῖα $z=x_j$ καθώς τό z κινεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος x.

Ἐάν ἡ συνάρτησις f ἐκλεγῇ εἰς τρόπον, ὥστε:

$$\frac{df}{dz}=A\cdot(z-x_1)^{-k_1}\cdot(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \qquad (3)$$

ὅπου A εἶναι μιγαδική σταθερά καί ἕκαστον τῶν k_j εἶναι πραγματική στα-

θερά, τό ὅρισμα τῆς $f'(z)$ ἀλλάζει κατά τόν προαναφερθέντα τρόπον καθώς τό z διαγράφει τόν πραγματικόν ἄξονα.

Διά τό ὅρισμα τῆς συναρτήσεως (3) δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}) \qquad (4)$$

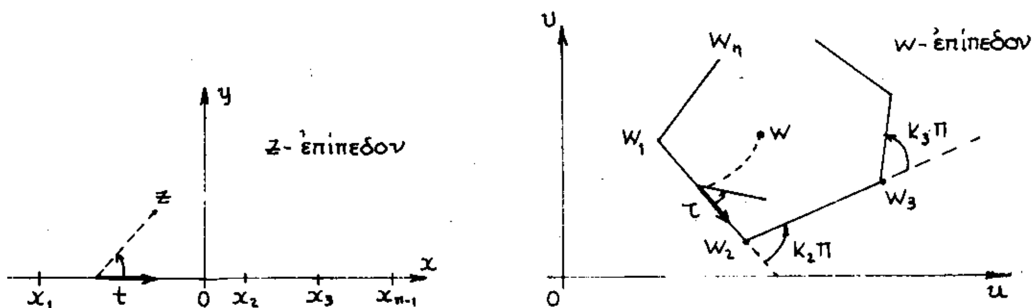
Εἰς τήν περίπτωσιν, ὅπου $z = x$ καί $x < x_1$, ἔχομεν:

$$\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = \cdots = \arg(z - x_{n-1}) = \pi$$

Ἐάν $x_1 < x < x_2$, τότε $\arg(z - x_1) = 0$ καί ἕκαστος τῶν ἄλλων ὅρων ἔχει ὅρισμα ἴσον πρός π.

Συμφώνως πρός τήν ἐξίσωσιν (4) τό $\arg f'(z)$ αὐξάνεται ἀποτόμως ὑπό τῆς γωνίας $k_1\pi$ καθώς τό z κινεῖται πρός τά δεξιά διά μέσου τοῦ σημείου $z = x_1$. Ὁμοίως τό $\arg f'(z)$ πηδᾶ εἰς μίαν μεγαλυτέραν τιμήν διά προσθέσεως τῆς γωνίας $k_2 \cdot \pi$ καθώς τό z διέρχεται διά μέσου τοῦ σημείου $z = x_2$ κ.ὁ.κ.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν ἐξίσωσιν (2), τό μοναδιαῖον διάνυσμα τ παραμένει σταθερόν κατά διεύθυνσιν καθώς τό z κινεῖται ἀπό τό σημεῖον x_{j-1} πρός τό σημεῖον x_j· τότε τό $W = f(x)$ κινεῖται κατά μίαν σταθεράν διεύθυνσιν κατά μῆκος μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Ἡ διεύθυνσις τῆς τ μεταβάλλεται ἀποτόμως ἀπό τῆς γωνίας $k_j\pi$ εἰς τό σημεῖον W_j, τό ὁποῖον εἶναι ἡ εἰκών τοῦ x_j ὑπό τοῦ $W = f(z)$. (βλ. Σχ. 1). Αὗται αἱ γωνίαι $k_j\pi$ εἶναι αἱ ἐξωτερικαί γωνίαι τοῦ πολυγώνου τοῦ διαγραφομένου ὑπό τοῦ σημείου W.



Σχ. 1

Αἱ ἐξωτερικαί γωνίαι δύναται νά μεταβάλλωνται μεταξύ τῶν τιμῶν $-\pi$ καί π, αὐτό σημαίνει ὅτι $-1 < k_j < 1$. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ πλευραί τοῦ πολυγώνου δέν διασταυροῦνται μεταξύ των καί ὅτι τοῦτο εἶναι προσανατολισμένο.

Ὡς γνωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς κλειστοῦ πολυγώνου εἶναι 2π καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν κορυφὴν W_n, ἡ ὁποία εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ σημείου $z=\infty$ ὑπὸ τῆς ἀπεικονίσεως (3) δύναται νὰ γραφῆ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$k_n \pi = 2\pi - (k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})\,\pi .$$

Οἱ ἀριθμοὶ k_j ὀφείλουν ἀναγκαστικῶς νὰ ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις:

$$\boxed{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}+k_n = 2\,, \quad -1 < k_j < 1 \quad (j=1,2,\ldots \eta)} \qquad (5)$$

Ἄς σημειώσωμεν ὅτι $k_n = 0$, ἐὰν

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n-1} = 2 \qquad (6)$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ διεύθυνσις τοῦ τ δὲν μεταβάλλεται εἰς τὸ σημεῖον W_n· ἤτοι τὸ W_n δὲν εἶναι μία κορυφὴ καὶ τὸ πολύγωνον ἔχει η-1 πλευράς (ἀνοικτὸν πολύγωνον).

Οὕτω ἐδείχθη ἡ ὕπαρξις μιᾶς συναρτήσεως τῆς ὁποίας δίδεται ἡ παράγωγος ὑπὸ τοῦ τύπου (3).

II. Ὁ μετασχηματισμὸς τῶν Schwartz-Christoffel.

Ἄς θεωρήσωμεν τὸν τύπον:

$$f'(z) = A\,(z-x_1)^{-k_1}\cdot(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}}\cdot(z-x_n)^{-k_n} \qquad (1')\,.$$

Ὅπως ἐλέχθη ἀνωτέρω ἡ συνάρτησις $W=f(z)$ ἀπεικονίζει τὸν ἄξονα x ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου. Ἀναλυτικώτερα, ἡ ἐν λόγω συνάρτησις ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος x ἐπὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυγώνου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $x_n=\infty$, ὁ τελευταῖος παράγων τοῦ ἀνωτέρω γινομένου δύναται νὰ παραλειφθῆ. Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν $A=K/(-x_n)^{-k_n}$, ὅπου K σταθερά, τότε τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος γράφεται:

$$K\cdot(z-x_1)^{-k_1}\cdot(z-x_2)^{-k_2}\cdots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}}\cdot\left(\frac{x_n-z}{x_n}\right)^{-k_n},$$

ὅπου $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}+k_n=2$ καὶ $-1<k_j<1$, $j=1,2,\cdots n$.

Καθὼς τὸ $x_n \longrightarrow \infty$ ὁ τελευταῖος παράγων τείνει πρὸς τὸ 1. Αὐτὸ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ παραλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Οὕτω λοιπόν ὅταν τά $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ εἶναι πεπερασμένα καί $x_n = \infty$, ἡ $f'(z)$ θά θεωρεῖται ὑπό τήν μορφήν:

$$f'(z) = A\,(z-x_1)^{-k_1} \cdot (z-x_2)^{-k_2} \cdots (z-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \qquad (1).$$

Ἄς θεωρήσωμεν τόν παράγοντα $(z-x_j)^{-k_j}$ ὁ ὁποῖος παριστᾶ κλάδον δυναμοσυναρτήσεως· καί ὁ ὁποῖος ἀποκόπτεται κάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἀναλυτικώτερα γράφομεν:

$$(z-x_j)^{-k_j} = |z-x_j|^{-k_j}\, e^{-ik_j\theta_j} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

ὅπου $\theta_j = \arg(z-x_j)$ καί $j = 1, 2, \cdots n-1$.

Οὕτω ἡ συνάρτησις $f'(z)$ εἶναι ἀναλυτική παντοῦ εἰς τό ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z \geq 0$ ἐκτός εἰς τά $n-1$ κλαδικά σημεῖα x_j.

Ἐάν z_0 εἶναι ἕνα σημεῖον εἰς τό χωρίον, ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική παριστῶντες δέ τοῦτο διά G, τότε ἡ συνάρτησις:

$$\boxed{W = F(z) = A \cdot \int_{z_0}^{z} \frac{dt}{(t-x_1)^{k_1}\,(t-x_2)^{k_2} \cdots (t-x_{n-1})^{k_{n-1}}}} \qquad (3)$$

εἶναι μία μονότιμος καί ἀναλυτική ἐντός τοῦ αὐτοῦ χωρίου, ὅπου ὁ δρόμος τῆς ὁλοκληρώσεως ἀπό τό z_0 εἰς τό z εἶναι κάθε γραμμή κειμένη ἐντός τοῦ χωρίου G. Ἐπί πλέον δέ ἔχομεν: $F'(z) = f'(z)$.

Ἵνα ὁρίσωμεν τήν συνάρτησιν $F(z)$ εἰς τό σημεῖον $z = x_1$ εἰς τρόπον, ὥστε αὕτη νά εἶναι συνεχής, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ $(z-x_1)^{-k_1}$ εἶναι ὁ μόνος παράγων τῆς ἐκφράσεως (1), ὅπου ἀπειρίζεται διά $z = x_1$. Οὕτω, ἐάν $\phi(z)$ παριστᾶ τό γινόμενον τῶν ὑπολοίπων παραγόντων τῆς ἐκφράσεως (1), ἡ $\phi(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς τό σημεῖον $z = x_1$ καί ὡς ἐκ τούτου δύναται νά ἀναπτυχθῆ ἐντός ἑνός ἀνοικτοῦ δίσκου $|z-x_1| < r_1$ εἰς σειράν Taylor πέριξ τοῦ x_1 ἤτοι:

$$f'(z) = (z-x_1)^{-k_1} \cdot \phi(z) = (z-x_1)^{-k_1}\left[\phi(x_1) + \phi'(x_1)\cdot(z-x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!}\,(z-x_1)^2 + \cdots\right]$$

$$\text{ἤ} \quad f'(z) = \phi(x_1)\cdot(z-x_1)^{-k_1} + (z-x_1)^{1-k_1}\cdot\psi(z) \qquad (4)$$

ὅπου ψ εἶναι ἀναλυτική καί κατά συνέπειαν συνεχής παντοῦ εἰς ὁλόκληρον τόν ἀνοικτόν δίσκον.

Ἐπειδή $1-k_1 > 0$, ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἐξισώσεως (4) παριστᾶ μίαν συνεχῆ συνάρτησιν τοῦ z παντοῦ εἰς τό τμῆμα τοῦ δίσκου,

ὅπου $\Im m z \geq 0$ (ἡμιδίσκος), ἐάν ἀποδώσωμεν εἰς τόν ὅρον τοῦτον τήν τιμήν μηδέν εἰς τό σημεῖον $z=x_1$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{z_1}^{z}(t-x_1)^{1-K_1}\cdot\psi(t)\cdot dt$$

τοῦ τελευταίου ὅρου τῆς (4) κατά μῆκος τῆς καμπύλης ἀπό τό z_1 ὡς τό z, ὅπου τό z_1 καί ἡ καμπύλη κεῖται εἰς τόν ἀνωτέρω ὁρισθέντα ἡμιδίσκον εἶναι μία συνεχής συνάρτησις τοῦ z εἰς τό σημεῖον $z=x_1$. Ἀκολούθως τό ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{z_1}^{z}(t-x_1)^{-K_1}\cdot dt=\frac{1}{1-K_1}\cdot\left[(z-x_1)^{1-K_1}-(z_1-x_1)^{1-K_1}\right]$$

κατά μῆκος τοῦ ἰδίου τμήματος παριστᾷ ἐπίσης μίαν συνεχῆ συνάρτησιν τοῦ z εἰς τό x_1, ἐάν ὁρίσωμεν ὡς τιμήν τοῦ ὁλοκληρώματος διά $t=x_1$ ὡς τό ὅριον τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος καθώς τό z τείνει πρός τό x_1 κινούμενον ἐντός τοῦ ὁρισθέντος ἡμιδίσκου· μέ ἄλλους λόγους ἐάν ὁρίσωμεν ὡς τιμήν τοῦ ὁλοκληρώματος διά $t=x_1$ τήν τιμήν $\frac{-1}{1-K_1}(z_1-x_1)^{1-K_1}$.

Ὅθεν, τό ὁλοκλήρωμα (3) ἐντός τοῦ G κατά μῆκος τοῦ δρόμου ἀπό z_0 ἕως z δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$\int_{z_0}^{z}f'(t)dt+\left\{\int_{z_1}^{z}(t-x_1)^{1-K_1}\psi(t)dt+\int_{z_1}^{z}(t-x_1)^{-K_1}dt\right\}$$

καί συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω τό ὁλοκλήρωμα (3) εἶναι συνεχής συνάρτησις τοῦ z ὡς ἄθροισμα συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ z.

Ὁ ἀνωτέρω συλλογισμός ἐφαρμόζεται εἰς τά $n-1$ σημεῖα x_j καί οὕτω ἡ κατασκευασθεῖσα συνάρτησις $F(z)$ εἶναι συνεχής εἰς τό χωρίον $G\equiv \Im m z\geq 0$.

Διά νά ἐξετάσωμεν τήν συμπεριφοράν τῆς συναρτήσεως $F(z)$ τοῦ τύπου (3) εἰς τό σημεῖον $z=\infty$, ἐκτελοῦμεν τήν ἀντικατάστασιν $t=\frac{1}{t'}$ καί παραλείποντες τούς τόνους εὑρίσκομεν πάλιν:

$$F(z)=-\int_{1/z_0}^{1/z}\frac{dt}{t^{2-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1})}\cdot(1-a_1t)^{\lambda_1}\cdots(1-a_{n-1}t)^{\lambda_{n-1}}} \qquad (5)$$

Ἐντεῦθεν τό ὁλοκλήρωμα (5) εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ z εἰς τό σημεῖον $z=\infty$, ἐάν $\lambda_n = 2-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}) > -1$.

Ὡς ἐκ τούτου ὑπάρχει τό $\lim_{z\to\infty} F(z) \equiv \mathcal{W}_n$ (6)

Ἡ συνάρτησις τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (1) δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν: $f(z)=F(z)+B$, ὅπου B μιγαδική σταθερά. Τελικῶς ὁ μετασχηματισμός:

$$\boxed{W=f(z)=A\cdot\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{(t-x_1)^{k_1}\cdot(t-x_2)^{k_2}\cdots(t-x_{n-1})^{k_{n-1}}}+B} \qquad (7)$$

καλεῖται ***μετασχηματισμός τῶν Schwartz-Christoffel***.

Συμφώνως πρός τόν τύπον (6) ἡ εἰκόνα w_n τοῦ $z=\infty$ ὑπάρχει καί εἶναι $W_n=\mathcal{W}_n+B$.

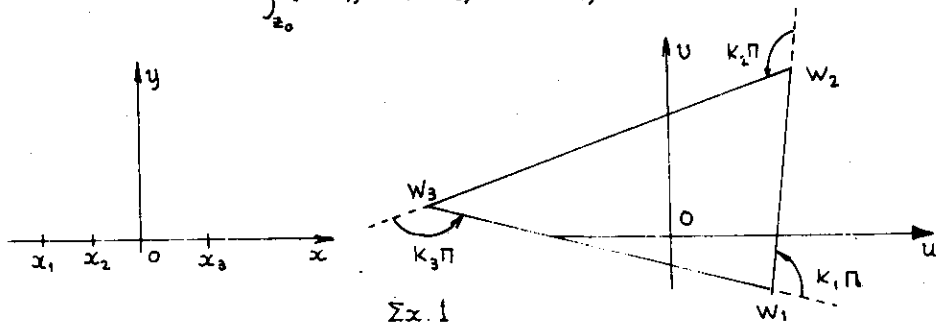
Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω, ἐάν μᾶς δοθοῦν ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x τά σημεῖα $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}$ καί τό $x_n=\infty$ καί οἱ πραγματικοί ἀριθμοί $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, k_n$ πού ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν: $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}+k_n=2$, τότε ὁ μετασχηματισμός (7) ἀπεικονίζει τά σημεῖα x_j $(j=1,2,\cdots n-1)$ εἰς τάς κορυφάς $W_j=f(x_j)$ ἑνός πολυγώνου, τό δέ σημεῖον $x_n=\infty$ τό ἀπεικονίζει εἰς τήν κορυφήν $W_n=\lim_{z\to\infty}F(z)+B$.

Ἤτοι, διά τοῦ μετασχηματισμοῦ (7) ὁ πραγματικός ἄξων ἀπεικονίζεται ἐπί τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου. Ἀκριβέστερον:

Ὁ μετασχηματισμός (7) ἀπεικονίζει συμμόρφως τό ἀνοικτόν ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z>0$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ χωρίου τοῦ πολυγώνου $[W(x_1), W(x_2), \cdots W(x_{n-1}), W_n]$ καί τό κλειστόν ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z\geq 0$ ἐπί τοῦ κλειστοῦ αὐτοῦ χωρίου.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό πολύγωνον εἶναι ἕνα τρίγωνον μέ κορυφάς εἰς τά σημεῖα W_1, W_2 καί W_3 (βλ. Σχ. 1), ὁ μετασχηματισμός (7) γράφεται:

$$W=A\cdot\int_{z_0}^{z}(t-x_1)^{-k_1}\cdot(t-x_2)^{-k_2}\cdot(t-x_3)^{-k_3}\,dt+B.$$



Σχ. 1

Εἶναι δέ $k_1+k_2+k_3=2$. Αἱ σταθεραί A καί B καθορίζουν τό μέγεθος καί τήν θέσιν τοῦ τριγώνου. Ἐάν ἡ W_3 ληφθῆ ὡς ἡ εἰκών τοῦ σημείου $x_3=\infty$, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται, ὡς γνωστόν, τότε:

$$W = A\int_{z_0}^{z}(t-x_1)^{-k_1}\cdot(t-x_2)^{-k_2}\,dt + B.$$

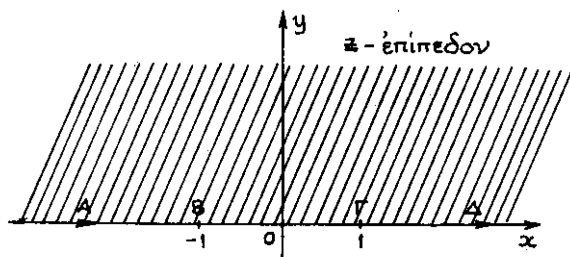
<u>Παρατήρησις</u>: Εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ τριγώνου πρέπει νά λάβωμεν τρία σημεῖα x_1, x_2, x_3 ἐπί τοῦ ἄξονος $0x$ ἤ δύο, ἐάν $x_3=\infty$ καί νά καθορίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τά σημεῖα τοῦ W-ἐπιπέδου πού θέλομεν ταῦτα νά ἀπεικονίζονται.

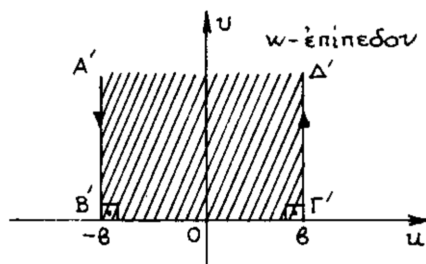
• Δοθέντος ἑνός πολυγώνου P ἄς ἐξετάσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν σταθερῶν εἰς τόν μετασχηματισμόν τῶν Schwartz–Christoffel, αἱ ὁποῖαι πρέπει νά προσδιορισθοῦν διά νά ἀπεικονίζεται ὁ ἄξων x ἐπί τοῦ P. Δι' αὐτόν τόν σκοπόν δυνάμεθα νά γράψωμεν $z_0=0$, $A=1$ καί $B=0$ καί ἁπλῶς νά ἀπαιτήσωμεν ὅτι, ὁ ἄξων x δύναται νά ἀπεικονίζεται ἐπί ἑνός πολυγώνου P' ὁμοίου πρός τό P. Τό μέγεθος καί ἡ θέσις τοῦ P' δύναται τότε νά καθορισθοῦν ὡς πρός τό ὅμοιόν πρός αὐτό πολύγωνον P διά τῆς εἰσαγωγῆς ἐκ τῶν προτέρων τῶν σταθερῶν A καί B.

Οἱ ἀριθμοί k_j προσδιορίζονται πάντες ἀπό τάς ἐξωτερικάς γωνίας εἰς τάς κορυφάς τοῦ πολυγώνου P. Αἱ $n-1$ σταθεραί x_j πρέπει νά ἐκλεγοῦν. Ἡ εἰκόνα τοῦ ἄξονος x εἶναι κάποιο πολύγωνον P', τό ὁποῖον ἔχει τάς αὐτάς γωνίας μέ τό P. Ἀλλά ἐάν τό P' ὀφείλῃ νά εἶναι ὅμοιον πρός τό P, τότε αἱ $n-2$ διαδοχικαί πλευραί πρέπει νά ἔχουν ἕναν κοινόν λόγον ὡς πρός τάς ἀντιστοίχους πλευράς τοῦ P. Αὐτή ἡ συνθήκη ἐκφράζεται μέσω $n-3$ ἐξισώσεων μέ τούς $n-1$ πραγματικούς ἀγνώστους x_j. Ὅθεν, <u>δύο τῶν ἀριθμῶν</u> x_j <u>ἤ δύο σχέσεις μεταξύ αὐτῶν δύνανται νά ἐκλεγοῦν αὐθαιρέτως ὑπό τόν ὅρον ὅτι αὐταί αἱ</u> $n-3$ <u>ἐξισώσεις μέ τούς ἐναπομένοντας</u> $n-3$ <u>ἀγνώστους νά ἔχουν πραγματικάς λύσεις</u>.

<u>Παραδείγματα</u> $1^{ον}$ Νά προσδιορισθῆ μία συνάρτησις $W(z)$, ἡ ὁποία νά ἀπεικονίζῃ συμμόρφως τό ἄνω μέρος τοῦ z-ἐπιπέδου ($\mathcal{I}m\, z>0$) εἰς τό δεικνυό-

μενον ὑπό τοῦ σχήματος χωρίον (λωρίδα) τοῦ W-ἐπιπέδου.





Σχ. 1α Σχ. 1β

<u>Λύσις:</u> Δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τό χωρίον (λωρίδα) Α'Β'Γ'Δ' ὡς μίαν ὁριακήν περίπτωσιν ἑνός τριγώνου μέ δύο κορυφάς τά σημεῖα Β' καί Γ' καί τήν τρίτην κορυφήν τήν Α' ἤ Δ' εἰς τό ἄπειρον.

Ἐπειδή αἱ γωνίαι Β' καί Γ' εἶναι ἴσαι πρός $\frac{\pi}{2}$, ἕπεται ὅτι $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$. Θεωροῦντες ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x τά σημεῖα $x_1=-1$ καί $x_2=1$, ὁ τύπος (7) τῆς ὑπό § II, παραλείποντες τά ὅρια ὁλοκληρώσεως, γράφεται:

$$W(z) = A\int\frac{dz}{(z+1)^{1/2}\cdot(z-1)^{1/2}} + B = A\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} + B \quad \text{ἤ}$$

$$W(z) = K\cdot\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + B\ ,\quad \text{ὅπου}\quad K=\frac{A}{i}$$

Ὅθεν, $W(z) = K\ \text{τοξημ}\ z + B$.

Ἀρκεῖ νά προσδιορισθοῦν αἱ σταθεραί K καί B.

Ἔστω ὅτι εἰς τό $x_2=1$ ἀντιστοιχεῖ τό $W=\beta$ καί εἰς τό $x_1=-1$ ἀντιστοιχεῖ τό $W=-\beta$, ὅτε ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου λαμβάνομεν:

$$\beta = K\ \text{τοξημ}\,1 + B = \frac{K\pi}{2} + B$$

$$-\beta = K\ \text{τοξημ}(-1) + B = \frac{-K\pi}{2} + B$$

Δι' ἐπιλύσεως τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εὑρίσκομεν $B=0$, $K=\frac{2\beta}{\pi}$.

Ὅθεν ὁ ζητούμενος μετασχηματισμός εἶναι $W=\frac{2\beta}{\pi}\ \text{τοξημ}\ z$

2ον/ Νά προσδιορισθῆ μία συνάρτησις $W(z)$, ἡ ὁποία νά ἀπεικονίζη συμμόρφως τά ἄνω ἡμιεπίπεδον $\mathrm{Im}\, z>0$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ τομέως $0<\arg w<a\pi$, $0<a<2$.

Λύσις: Ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς τομεὺς εἶναι ἕνα πολύγωνον μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα A_1 ($W=0$) καὶ A_2 ($W=\infty$), τὸ ὁλοκλήρωμα τῶν Schwartz-Christoffel δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος. Θέτομεν τὴν ἀκόλουθον ἀντιστοίχισιν τῶν σημείων τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ δοθέντος πολυγώνου:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \longrightarrow A_1(W=0) \\ x_2 = \infty \longrightarrow A_2(W=\infty) \end{array}\right\} \quad (1)$$

Εἶναι δέ, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τομέως:

$\pi - a\cdot\pi = (1-a)\cdot\pi$. Ὅθεν $k_1 = 1-a$.

Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον (7) τῆς ὑπό-§, II καὶ θέτοντες $z_0 = 0$ λαμβάνομεν:

$$W(z) = A\cdot\int_0^z t^{a-1}dt + B \quad (2) \quad \text{ἢ}$$

$$W(z) = \frac{A}{a}\cdot z^a + B \quad (3)$$

Λόγῳ τῆς (1) ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν $B=0$.

Ὅθεν,
$$W(z) = \frac{A}{a}\cdot z^a \quad (4)$$

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς σταθερᾶς A ἀρκεῖ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοίχισιν νὰ θέσωμεν καὶ μίαν ἐπὶ πλέον ἀπαίτησιν. Ἔστω π.χ. εἰς τὸ $x_3 = 1 \longrightarrow W=1$ καὶ οὕτω προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τῆς αὐθαιρέτου σταθερᾶς ἐκ τῆς (4) καὶ εὑρίσκεται $A=a$.

Ὅθεν, ἡ ζητουμένη συνάρτησις εἶναι $W=z^a$

3ον/. Νὰ προσδιορισθῆ μία συνάρτησις $W(z)$, ἡ ὁποία νὰ ἀπεικονίζῃ συμμόρφως τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Λύσις. Διὰ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχομεν $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{2}{3}$. Εἶναι κατάλληλον νὰ γράψωμεν $x_1=-1$, $x_2=1$ καὶ $x_3=\infty$, καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους (7) τῆς ὑπό-§II, ὅταν $z_0=1$, $A=1$ καὶ $B=0$.

Οὕτω ὁ μετασχηματισμὸς γίνεται.

$$W = \int_1^z (t+1)^{-2/3}\cdot(t-1)^{-2/3}dt \quad (1)$$

Ἡ εἰκὼν τοῦ $z=x_2=1$ εἶναι, λόγῳ τοῦ (1), $W(1)=0$ δηλ. τὸ $W_2=0$. Ὅταν $z=x_1=-1$, εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα (1) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $t=x$ τότε $-1<x<1$ καὶ $x+1>0$ καὶ $\arg(x+1)=0$ καὶ $|x-1|=1-x$ καὶ $\arg(x-1)=\pi$ Ὅθεν, τὸ (1) γράφεται:

$$W_1=\int_1^{-1}(x+1)^{-2/3}\cdot(1-x)^{-2/3}\cdot\exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\right)\cdot dx \quad \text{ἢ}$$

$$W_1=\exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} \qquad (2)$$

Ἂν καλέσωμεν β τὴν τιμὴν τοῦ τελευταίου ὁλοκληρώματος τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\beta=2\int_0^1\frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$$

Θέτοντες $x^2=t$ τὸ ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα ἀνάγεται εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\beta=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-2/3}dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1-t)^{\frac{1}{3}-1}dt=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}$$ (βλέπε Κεφ. IX Ἄσκησις 16)

Συνεπῶς $W_1=\beta\exp\frac{\pi i}{3}$.

Ἡ κορυφὴ W_3 εὑρίσκεται βάσει τοῦ τύπου (6) τῆς ὑπό-§ II καὶ εἶναι:

$$W_3=\lim_{z\to\infty}F(z)=\int_1^{\infty}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{-\frac{2}{3}}dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}} \qquad (3)$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος (3) ἐκτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $x^2=\frac{1}{t}$, ὁπότε τοῦτο μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα:

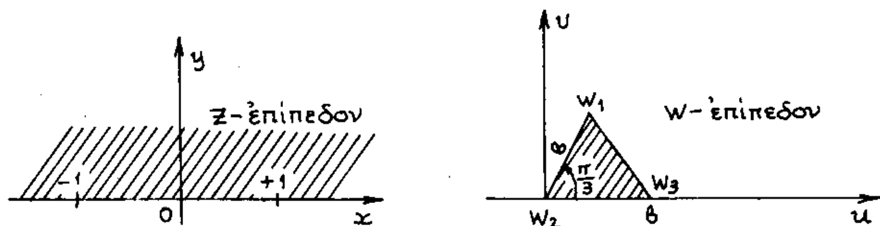
$$W_3=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-5/6}(1-t)^{-2/3}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{6}-1}(1-t)^{\frac{1}{3}-1}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{6}+\frac{1}{3})}$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι $W_3=\beta$. Πρὸς τοῦτοις ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})} \quad \text{ἢ} \quad \Gamma(\tfrac{1}{6})\cdot\Gamma(\tfrac{5}{6})=2\Gamma^2(\tfrac{1}{2}).$$

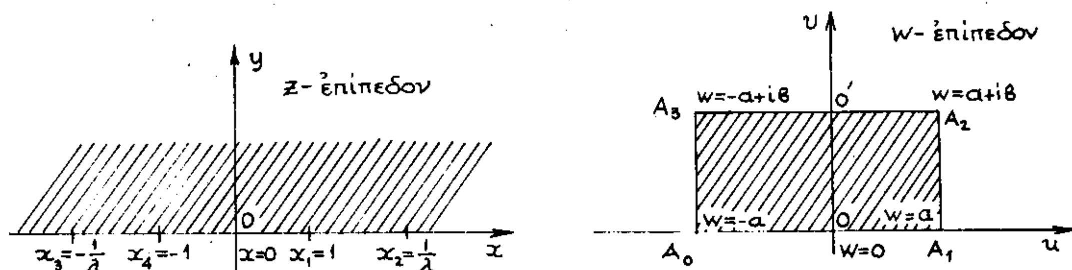
Πράγματι, γνωρίζομεν ὅτι διὰ $0<p<1$ ἰσχύει $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\eta\mu\pi p}$ (βλ. Ἄσκησι 24 σελ. 254, τόμος II).

Ὅθεν, $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{\pi}{\eta\mu\frac{\pi}{6}}=2\pi=2(\sqrt{\pi})^2=2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$. (γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$). Ἄρα $W_3=\beta$. (βλ. Σχ. (2).



Σχ. 1

4ον/. Νά εὑρεθῆ μία συνάρτησις $W(z)$, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει συμμόρφως τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\mathcal{I}m\, z>0$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου $A_1A_2A_3A_4$ (βλ. Σχ. 4).



Σχ. 4.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ὅτι αἱ κορυφαί τοῦ ὀρθογωνίου εἰς τό W-ἐπίπεδον εἶναι τά σημεῖα $A_1(W=a)$, $A_2(W=a+i\beta)$, $A_3(W=-a+i\beta)$, $A_4(W=-a)$.

Ἐπειδή τό ὀρθογώνιον $A_1A_2A_3A_4$ εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν υ, εἶναι φυσικόν νά θεωρήσωμεν τοιαύτην ἀπεικόνισιν πού νά ἀπεικονίζη συμμετρικά σημεῖα τοῦ ἄξονος x ὡς πρός τήν ἀρχήν του 0 εἰς συμμετρικά σημεῖα τοῦ ὀρθογωνίου ὡς πρός τόν υ. Οὕτω λοιπόν δυνάμεθα νά θέσωμεν τήν ἀντιστοίχισιν:

$$\left.\begin{aligned} x_1=1 &\longrightarrow A_1\ (W=a)\\ x_4=-1 &\longrightarrow A_4\ (W=-a)\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

$$\text{καί}\qquad x=0 \longrightarrow W=0. \qquad (2)$$

Αἱ σχέσεις (1) καί (2) ὁρίζουν μίαν ἀντιστοίχισιν μεταξύ τριῶν συνοριακῶν

σημείων τῶν δύο τύπων.

Εἶναι ὅθεν ἀδύνατον νά καθορίσωμεν αὐθαιρέτως ἐπί τοῦ ἄξονος οx τό σημεῖον x_2 τοῦ ὁποίου ἡ εἰκών μέσω τῆς $W(z)$ νά δίδη τήν κορυφήν A_2 τοῦ ὀρθογωνίου. Ἄν ὑποθέσωμεν λοιπόν ὅτι τό σημεῖον x_2 τοῦ ἄξονος οx μέ τετμημένην ἴσην πρός $\frac{1}{\lambda}$ (ἡ τιμή τῆς ὁποίας θά καθορισθῆ ἀργότερον) δίδει τήν κορυφήν A_2. Προφανῶς $0<\lambda<1$. Λόγω δέ τῆς συμμετρίας καί τό σημεῖον $x_3=-\frac{1}{\lambda}$ θά δίδη τήν κορυφήν A_3. Προφανῶς ἔχομεν $k_1=k_2=k_3=k_4=\frac{1}{2}$. Οὕτω πληροῦται ἡ συνθήκη $k_1+k_2+k_3+k_4=2$.

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία ὁρίζει μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου δύναται νά παρασταθῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$w=f(z)=C^*\int_{z_0}^{z}(t-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(t+1)^{-\frac{1}{2}}\,dt+C_1 \qquad (3)$$

Θέτοντες $z_0=0$ καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν σχέσιν (2) εὑρίσκομεν $C_1=0$. Οὕτω τελικῶς ἡ (3) γράφεται:

$$W=C\cdot\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\cdot(1-\lambda^2t^2)}} \qquad (4)$$

Παραμένει ἤδη νά προσδιορισθοῦν αἱ σταθεραί C καί λ ἀπό τήν ἀντιστοίχισιν τῶν σημείων x_1 καί x_2 τοῦ ἄξονος x καί τῶν κορυφῶν A_1 καί A_2.

Τό ὁλοκλήρωμα (4) δέν δύναται νά ἐκφρασθῆ διά στοιχειωδῶν συναρτήσεων. (βλ. σχετικῶς Τόμος I, Κεφ. XVIII, § 8, ἐλλειπτικά ὁλοκληρώματα). Εἶναι τοῦτο, ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων, ἕνα <u>ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα πρώτου εἴδους</u> καί τό ὁποῖον συνήθως παρίσταται ὡς κατωτ:

$$F(z,\lambda)=\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2t^2)}} \qquad (5).$$

Αἱ συνθῆκαι (1) δίδουν:

$$a=C\cdot\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\cdot(1-\lambda^2t^2)}} \qquad (6).$$

Τό ὁλοκλήρωμα τῆς σχέσεως (6) – προφανῶς εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ t

εἶναι πραγματική μεταβλητή — καλεῖται ***πλῆρες ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα πρώτου εἴδους*** καί παρίσταται ὡς κάτωθι:

$$K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\cdot(1-\lambda^2 t^2)}} \qquad (7)$$

Ἡ $K(\lambda)$ εἶναι μία συνάρτησις ἐπαρκῶς μελετημένη.

Ἡ ἀντιστοίχισις τῶν σημείων : $x_2 = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow A_2\ (w = a + ib)$ μᾶς ἐπιτρέπει νά γράψωμεν :

$$a + ib = C \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} + \int_1^{1/\lambda} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} \right\} \qquad (8)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν καί τήν (6), ἐκ τῆς (8) ἔχομεν τελικῶς :

$$b = C \cdot \int_1^{1/\lambda} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-\lambda^2 t^2)}} \equiv C \cdot \tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right) \qquad (9)$$

ὅπου τό ὁλοκλήρωμα τῆς (9) παρίσταται ὑπό τοῦ συμβόλου $\tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)$.

Ἐκ τῶν σχέσεων (6) καί (9) προφανῶς λαμβάνομεν τήν συναρτησιακήν ἐξίσωσιν:

$$a \cdot \tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right) = b \cdot K(\lambda) \qquad (10)$$

Μέ δεδομένα λοιπόν τά a καί b διά ἐπιλύσεως τῆς (10) δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν τιμήν λ καί λόγῳ τῆς (6) καί τήν τιμήν C.

Οὕτω, ἡ συνάρτησις (4) ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ συμμόρφως ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου εἰς τό w-ἐπίπεδον, ὡρίσθη πλήρως.

Ἐάν αἱ σταθεραί λ καί C δίδονται εἰς τόν τύπον (4), τότε αὐτή ἡ συνάρτησις ὁρίζει μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου $\Im m z > 0$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ κάποιου ὀρθογωνίου τοῦ w-ἐπιπέδου, ὁ λόγος τῶν πλευρῶν $\left(\frac{a}{b}\right)$ αὐτοῦ καθορίζεται ὑπό τῆς (10) καί ἡ ἀπόλυτος τιμή τῶν πλευρῶν καθορίζεται ὑπό τῆς σταθερᾶς C, λόγῳ τῆς (9). Μεταβάλλοντες τάς τιμάς λ καί C θά ἔχωμεν προφανῶς μίαν ἄλλην σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου $\Im m z > 0$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ κάποιου ὀρθογωνίου τοῦ w-ἐπιπέδου.

5ον/. Νά εὑρεθῆ μία σύμμορφος ἀπεικόνισις ἡ ὁποία νά ἀπεικονίζῃ τό ἐσωτερικόν τοῦ μοναδιαίου κύκλου ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ ἑνός πολυγώνου.

Λύσις: Ὡς γνωστόν ἕνα πολύγωνον τοῦ W- ἐπιπέδου δύναται νά θεωρηθῆ διά τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel ὅτι εἶναι ἡ ἀπεικόνισις τοῦ ἄξονος ox ἐπί τῶν πλευρῶν του, τό δέ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z>0$ ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ πολυγώνου.

Ὁ τύπος λοιπόν τῶν Schwartz-Christoffel εἶναι:

$$W=A\int\frac{dz}{(z-x_1)^{k_1}\cdot(z-x_2)^{k_2}\cdots(z-x_n)^{k_n}}+B \qquad (1)$$

μέ $k_1+k_2+\cdots+k_n=2$.

(ὅπου παρελήφθησαν τά ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως καί ἀντί τοῦ t θεωρήσαμεν τό z).

Ἕνας μετασχηματισμός πού ἀπεικονίζει τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z>0$ ἐπί τοῦ μοναδιαίου κύκλου $|\zeta|=1$ τοῦ ζ- ἐπιπέδου δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\zeta=\frac{i-z}{i+z} \quad \text{ἤ} \quad z=i\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right) \qquad (2)$$

(βλ. σχετικῶς Κεφ. V, §4, Ἐφαρμογή) ὅπου ἐλάβαμεν $\theta=\pi$, $z_0=i$.

Ἐάν τά σημεῖα $x_1, x_2, \cdots, x_n$ τοῦ ἄξονος ox ἀπεικονίζονται μέσω τῆς (2) εἰς τά σημεῖα $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ ἀντιστοίχως τῆς περιφερείας τοῦ μοναδιαίου κύκλου, τότε θά ἔχωμεν διά $k=1,2,\cdots,n$.

$$z-x_k=i\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)-i\left(\frac{1-\zeta_k}{1+\zeta_k}\right)=\frac{-2i(\zeta-\zeta_k)}{(1+\zeta)(1+\zeta_k)} \qquad (3)$$

Ἐπίσης $dz=\frac{-2i\,d\zeta}{(1+\zeta)^2}$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) τά $z-x_k$ τά διδόμενα ὑπό τῶν (3), καθώς καί τό dz, λαμβάνομεν:

$$W=(-2i)^{n}\cdot A\cdot\int\frac{(1+\zeta)^{k_1}(1+\zeta_1)^{k_1}\cdots(1+\zeta)^{k_n}(1+\zeta_n)^{k_n}}{(1-\zeta_1)^{k_1}\cdots(1-\zeta_n)^{k_n}}\cdot\frac{-2i}{(1+\zeta)^2}\,d\zeta+B \qquad (4)$$

Λαμβανομένου δέ ὑπ' ὄψιν ὅτι $(1+\zeta)^{k_1}\cdots(1+\zeta)^{k_n}=(1+\zeta)^2$ καί μετά τάς ἁπλοποιήσεις λαμβάνομεν ἐκ τοῦ (4):

$$W=(-2i)^{n+1}\cdot(1+\zeta_1)^{k_1}\cdots(1+\zeta_n)^{k_n}\cdot A\cdot\int\frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_1)^{k_1}\cdots(1-\zeta_n)^{k_n}}+B \qquad (5)$$

ἤ θέτοντες $(-2i)^{n+1}\cdot(1+\zeta_1)^{k_1}\cdots(1+\zeta_n)^{k_n}\cdot A=A'$ θά ἔχωμεν:

$$W=A'\cdot\int\frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_1)^{k_1}\cdots(\zeta-\zeta_n)^{k_n}}+B \qquad (6)$$

Οὕτω ὁ μετασχηματισμός (6) ἀπεικονίζει τό ἐσωτερικόν τοῦ μοναδιαίου κύκλου $|\zeta|=1$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ πολυγώνου, αἱ δέ κορυφαί τοῦ πολυγώνου εἶναι αἱ εἰκόνες τῶν σημείων ζ_k τοῦ κύκλου μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ (6).

6ον/ Νά κατασκευασθῆ μία συνάρτησις $W(z)$ ἡ ὁποία νά ἀπεικονίζη συμμόρφως τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z>0$ ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ ἑνός τριγώνου.

Λύσις: Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν τό σύνορον εἶναι ἕνα ἁπλό πολύγωνο. Ἔστω ὅτι αἱ ἐσωτερικαί γωνίαι αὐτοῦ τοῦ τριγώνου εἶναι $a_1\pi$, $a_2\pi$, $a_3\pi$. Τότε $a_1+a_2+a_3=1$. Ἐάν θέσωμεν $k_1=1-a_1$, $k_2=1-a_2$, $k_3=1-a_3$, τότε αἱ συνθῆκαι (5) τῆς ὑπό-§, I ἱκανοποιοῦνται.

Δυνάμεθα νά λάβωμεν $x_1=0$, $x_2=1$ καί ὁ τύπος (7) τῆς ὑπό-§, II μέ $B=0$ καί $z_0=0$ γράφεται:

$$W(z)=A\cdot\int_0^z \frac{dt}{t^{k_1}\cdot(t-1)^{k_2}} \qquad (1)$$

Ἐπειδή $(t-1)^{k_2}=(-1)^{k_2}(1-t)^{k_2}$, ὁ (1) γράφεται

$$W(z)=\frac{A}{(-1)^{k_2}}\int_0^z \frac{dt}{t^{k_1}\cdot(1-t)^{k_2}}=\frac{A}{(-1)^{k_2}}\int_0^z t^{a_1-1}\cdot(1-t)^{a_2-1}dt \qquad (2)$$

Θέτοντες δέ $\frac{A}{(-1)^{k_2}}=1$, ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει:

$$W(z)=\int_0^z t^{a_1-1}\cdot(1-t)^{a_2-1}\,dt \qquad (3)$$

Εἶναι: $$W(1)=\int_0^1 t^{a_1-1}(1-t)^{a_2-1}dt=B(a_1,a_2)=\frac{\Gamma(a_1)\cdot\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}$$

$$=\frac{\Gamma(a_1)\cdot\Gamma(a_2)}{\Gamma(1-a_3)}=\frac{1}{\pi}\,\Gamma(a_1)\cdot\Gamma(a_2)\cdot\Gamma(a_3)\,\eta\mu\,\pi a_3$$

Ἐντεῦθεν, τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς ἀπέναντι πρός τήν κορυφήν B_3 εἶναι:

$$\ell_3=\frac{1}{\pi}\cdot\Gamma(a_1)\cdot\Gamma(a_2)\cdot\Gamma(a_3)\,\eta\mu\,\pi a_3.$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται, ὅτι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς ἀπέναντι πρός τήν κορυφήν B_1 εἶναι:

$$\ell_1 = \int_1^{\infty} t^{a_1-1} \cdot (t-1)^{a_2-1} dt = \int_0^1 t^{1-a_1} \cdot (1-t)^{a_2-1} \frac{dt}{t^{1+a_2}}$$

$$= \int_0^1 t^{-(a_1+a_2)} \cdot (1-t)^{a_2-1} dt = \int_0^1 t^{a_3-1} \cdot (1-t)^{a_2-1} dt \quad \text{ἤ}$$

$$\ell_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2) \cdot \Gamma(a_3)\, \eta\mu\, \pi a_1$$

Σχεδόν διά τοῦ ἰδίου τρόπου εὑρίσκομεν:

$$\ell_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2) \cdot \Gamma(a_3) \cdot \eta\mu\, \pi a_2$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τ' ἀνωτέρω ἀποτελέσματα συμφωνοῦν μέ τόν κανόνα τοῦ ἡμιτόνου, ἤτοι: $\dfrac{\ell_1}{\eta\mu\pi a_1} = \dfrac{\ell_2}{\eta\mu\pi a_2} = \dfrac{\ell_3}{\eta\mu\pi a_3}$.

§ 5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΩΝ ΥΠΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΝ ΜΟΡΦΗΝ

● Ἔστω μία καμπύλη (γ) τοῦ z- ἐπιπέδου κλειστή ἤ ὄχι ἔχουσα ὡς παραμετρικάς ἐξισώσεις τάς $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, ὅπου αἱ συναρτήσεις φ, f εἶναι διαφορίσιμοι.

Θεωροῦμεν τόν μετασχηματισμόν $z=\varphi(w)+i\cdot f(w)$ (1)

Λέγομεν ὅτι οὗτος ἀπεικονίζει τήν (γ) εἰς τόν πραγματικόν ἄξονα τοῦ W- ἐπιπέδου.

Πράγματι, θέτοντες $z=x+iy$ καί $w=u+iv$ ὁ (1) γράφεται:

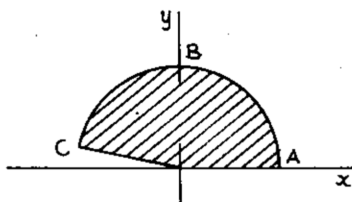
$$x+iy=\varphi(u+iv)+i f(u+iv) \quad (2)$$

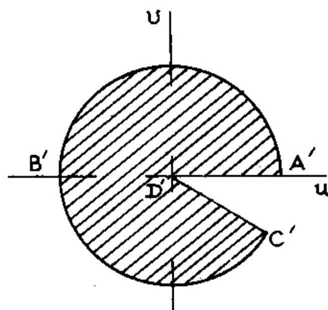
Ὁ πραγματικός ἄξων τοῦ W- ἐπιπέδου εἶναι ὁ $v=0$ καί λόγῳ τῆς (2), θά ἀντιστοιχῇ εἰς τήν καμπύλην $x+iy=\varphi(u)+if(u)$, ἤτοι τήν καμπύλην μέ ἐξισώσεις: $x=\varphi(u)$, $y=f(u)$ δηλ. τήν (γ).

Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθῇ ὁ μετασχηματισμός πού ἀπεικονίζει τήν ἔλλειψιν $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τοῦ z- ἐπιπέδου ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τοῦ W- ἐπιπέδου.

Λύσις: Αἱ παραμετρικαί ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως εἶναι $x=a\,\sigma\upsilon\nu t$, $y=\beta\,\eta\mu t$ καί ὡς ἐκ τούτου ὁ μετασχηματισμός εἶναι: $z=a\,\sigma\upsilon\nu w+i\beta\,\eta\mu w$.

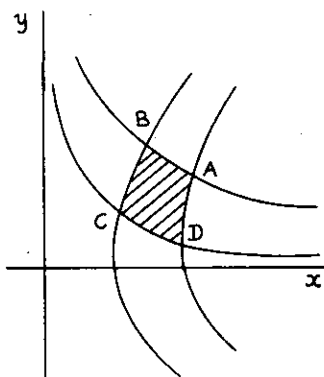
ΠΙΝΑΞ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΥΠΟ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

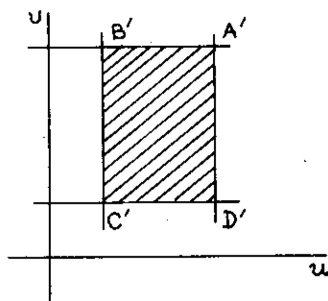




Σχ. 1

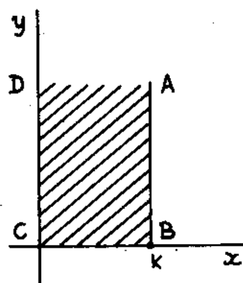
$W = z^2$

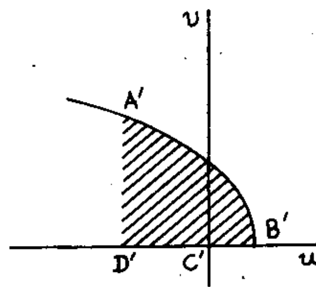




Σχ. 2.

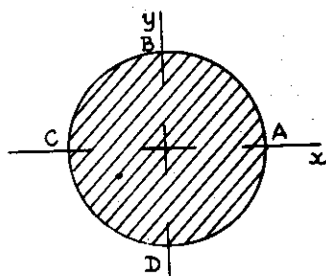
$W = z^2$

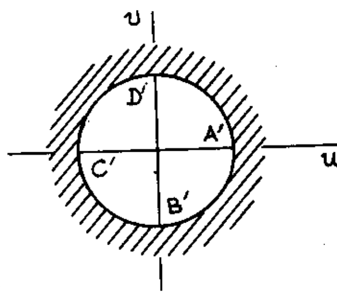




Σχ. 3

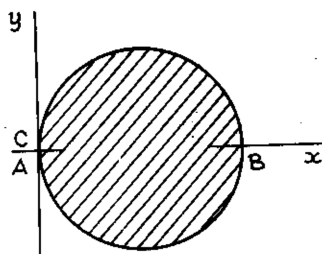
$W = z^2$, A′ B′ τόξον παραβολῆς $\rho = \frac{2k^2}{1 + \text{συν}\varphi}$

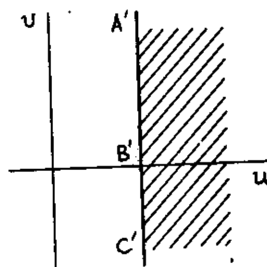




Σχ. 4.

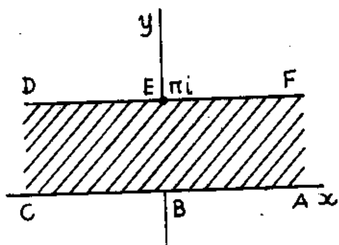
$w = \frac{1}{z}$.

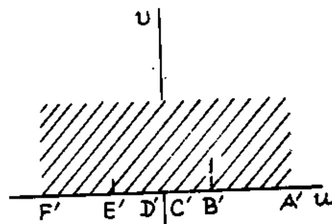




Σχ. 5

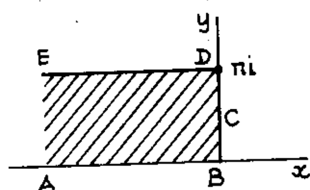
$w = \frac{1}{z}$

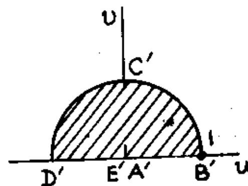




Σχ. 6

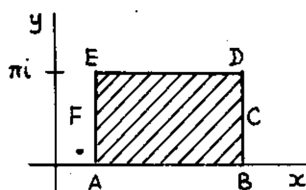
$w = e^z$

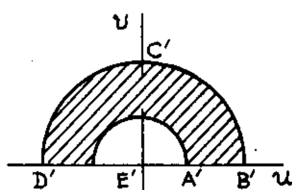




Σχ. 7

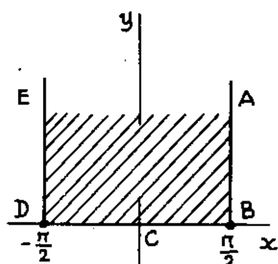
$w = e^z$

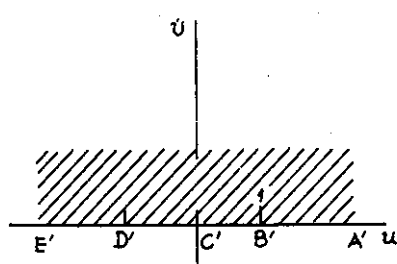




Σχ. 8

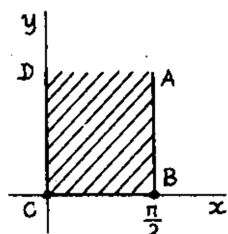
$w = e^z$

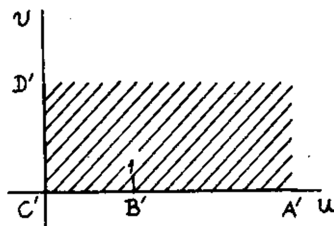




Σχ. 9

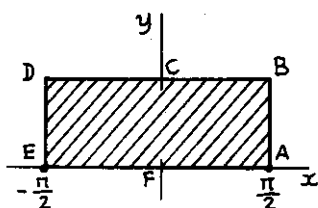
$w =$ ημ z

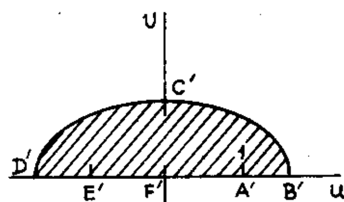




Σχ. 10

$w =$ ημ z.

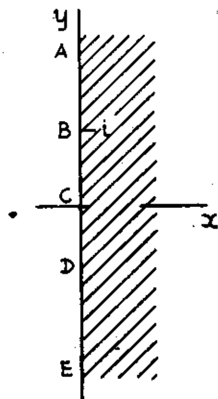


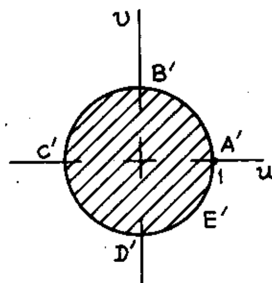


Σχ. 11.

$w =$ ημ z BCD ή γραμμή $y = k$, B′C′D′ τόξον ἐλλείψεως

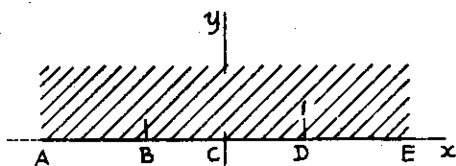
$$\left(\frac{u}{\cosh k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh k}\right)^2 = 1$$

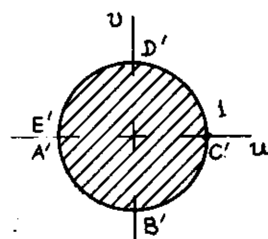




Σχ. 12

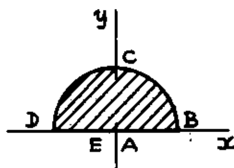
$w = \frac{z-1}{z+1}$

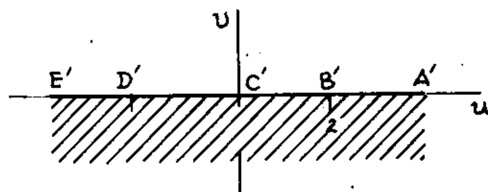




Σχ. 13

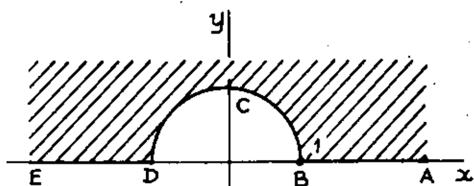
$w = \frac{i-z}{i+z}$

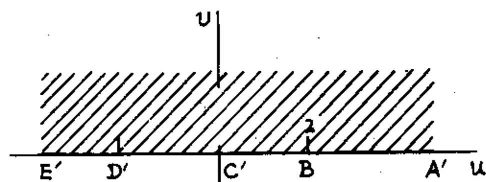




Σχ. 14

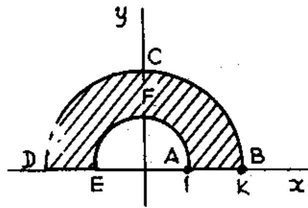
$w = z + \frac{1}{z}$

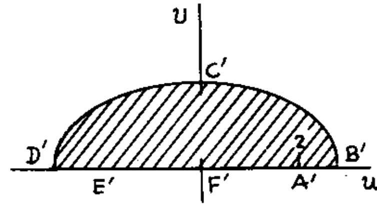




Σχ. 15

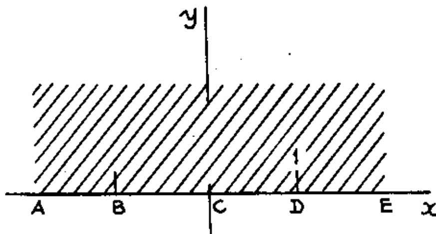
$w = z + \frac{1}{z}$

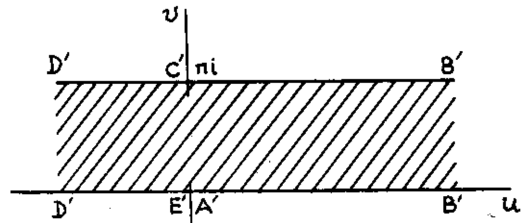




Σx. 16

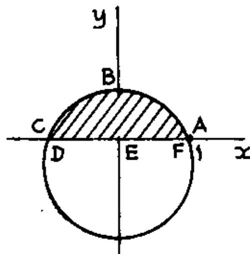
$w = z + \frac{1}{z}$, B′C′D′ τόξον ἐλλείψεως $\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1$.

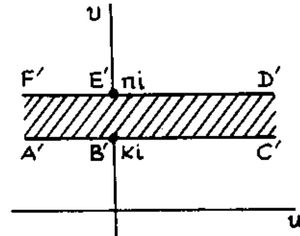




Σx. 17

$w = \log \frac{z-1}{z+1}$, $z = -\coth \frac{w}{2}$





Σx. 18

$w = \log \frac{z-1}{z+1}$, ABC τὸ ἡμικύκλιον $x^2+y^2-2y\sigma\varphi k=1$.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις

I. Μετασχηματισμός τῶν χωρίων

1. Ἔστω τό χωρίον G τοῦ z-ἐπιπέδου ὁριζόμενον ὑπό τῶν εὐθειῶν $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=1$. Νά προσδιορισθῆ τό χωρίον G′ τοῦ W-ἐπιπέδου, τό ὁποῖον εἶναι ἡ εἰκών τοῦ G ὑπό τῶν μετασχηματισμῶν:

   i). $W=z+(1-2i)$, ii). $w=\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}z$, iii) $W=\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}\cdot z+(1-2i)$

2. Νά προσδιορισθῆ τό χωρίον τοῦ W-ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ὁποίου ἀπεικονίζονται ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=z^2$ τά κάτωθι χωρία:
   i) Τό πρῶτον τέταρτον τοῦ z-ἐπιπέδου
   ii) Τό χωρίον πού περιορίζεται ὑπό τῶν εὐθειῶν $x=1$, $y=1$ καί $x+y=1$.

3. Δείξατε ὅτι, ἐάν ἡ $W=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ εἶναι ἀναλυτική ἐπί τοῦ χωρίου G, τότε θά ἔχωμεν:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=|f'(z)|^2$$

4. Δίδεται εἰς τό z-ἐπίπεδον ἕνα τρίγωνον T μέ κορυφάς τά σημεῖα $i, 1-i, 1+i$. Νά εὑρεθῆ ἡ εἰκών αὐτοῦ εἰς τό W-ἐπίπεδον ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $W=z+\frac{1}{z}$.

5. Ἡ ἀναλυτική συνάρτησις $W=F(z)$ ἀπεικονίζει τό ἐσωτερικόν G ἑνός κύκλου C, ὁριζομένου ὑπό τῆς ἐξισώσεως $|z|=1$, εἰς ἕνα χωρίον G′ πού φράσσεται ὑπό μιᾶς ἁπλῆς κλειστῆς καμπύλης C′. Δείξατε ὅτι: i) Τό μῆκος τῆς C′ εἶναι $\oint_C |F'(z)|\,|dz|$. ii) Τό ἐμβαδόν τοῦ G′ εἶναι $\iint_G |F'(z)|^2\,dx\,dy$.

6. Ἔστω z_0 ἕνα ἰδιάζον σημεῖον τῆς συναρτήσεως $f(z)$ καί ἔστω m εἶναι ὁ ἐλάχιστος θετικός ἀκέραιος τοιοῦτος, ὥστε $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. Ἔστω ὅτι Γ εἶναι ἡ εἰκών ἑνός λείου τόξου C ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $W=f(z)$ (βλ. σχῆμα 1 § 1). Δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι κλίσεως ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν:

$$\varphi_0=m\theta_0+\arg\left[f^{(m)}(z_0)\right].$$

Ἐν συνεχείᾳ δείξατε ὅτι, ἐάν a παριστᾷ τὴν γωνίαν μεταξὺ δύο λείων καμπύλων C_1 καὶ C_2, ὅπως δεικνύεται εἰς τό Σχ.2 § 1, ἡ ἀντίστοιχος γωνία μεταξὺ τῶν εἰκόνων Γ_1 καὶ Γ_2 τῶν ἀνωτέρω καμπύλων θά εἶναι $\beta = m \cdot a$.

7. Νά εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες τῶν κάτωθι χωρίων ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $W=\text{εφ}\,z$.
   i) Τῆς ἡμιλωρίδος $0<x<\pi$, $y>0$.
   ii) Τῆς λωρίδος $0<x<\pi$
   iii) Τῆς λωρίδος $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$.

8. Νά εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες τῶν κάτωθι χωρίων ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ $W=\text{τοξημ}\,z$.
   i) Τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου ($\mathfrak{Im}\,z>0$)
   ii) Τοῦ πρώτου τετάρτου τοῦ z-ἐπιπέδου.
   iii) Τοῦ ἡμιεπιπέδου $x<0$ ἐφ' ὅσον ἀποκόψομεν τό τμῆμα $(-\infty,-1]$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος.

9. Νά εὑρεθῆ τό πεδίον ἐπί τοῦ ὁποίου ὁ μετασχηματισμός $W=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ (Zoukowsky) ἀπεικονίζει:
   i) Τόν κύκλον $|z|<R<1$ ii) Τό πεδίον $|z|>R>1$ iii) Τόν κύκλον $|z|<1$.
   iv) Τό πεδίον $|z|>1$ v) Τό ἡμιεπίπεδον $\mathfrak{Im}\,z>0$ vi) Τό ἡμιεπίπεδον $\mathfrak{Im}\,z<0$
   vii) Τό ἡμικύκλιον $|z|<1$, $\mathfrak{Im}\,z>0$ viii) Τό ἡμικύκλιον $|z|<1$, $\mathfrak{Im}\,z<0$
   ix) Τό πεδίον $|z|>1$, $\mathfrak{Im}\,z>0$ x) Τό πεδίον $1<|z|<R$, $\mathfrak{Im}\,z>0$ xi) Τό πεδίον $\frac{1}{R}<|z|<R$, $\mathfrak{Im}\,z>0$, $\text{Re}\,z>0$
   xii) γωνία $\frac{\pi}{2}-a<\arg z<\frac{\pi}{2}+a$ $\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$.

10. Νά εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες τῶν κάτωθι πεδίων ὑπό τοῦ ἔναντι ἑκάστου δεικνυομένου μετασχηματισμοῦ:
   i) Κύκλου $|z|<1$, ὑπό τοῦ $W=\frac{z}{z^2+1}$
   ii) Ἡμικυκλίου $|z|<1$, $\mathfrak{Im}\,z>0$, ὑπό τοῦ $W=\frac{1}{z^2+1}$
   iii) Τῆς γωνίας $0<\arg z<\frac{\pi}{n}$, ὑπό τοῦ $W=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$

II. Ἐπὶ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel.

11. Δείξατε ὅτι ἡ εἰδικὴ περίπτωσις:

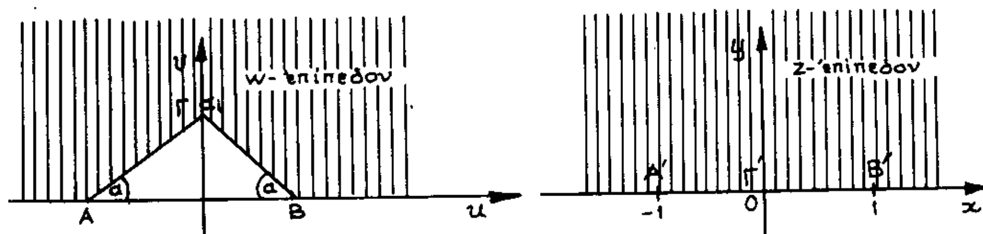
$$w = i\int_0^z (t+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(t-1)^{-\frac{1}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz - Christoffel, ἀπεικονίζει τὸν ἄξονα ox ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου μὲ κορυφάς:

$$W_1 = bi,\ W_2 = 0,\ W_3 = b,\ W_4 = b+ib,$$

ὅπου ὁ θετικὸς ἀριθμὸς b δίδεται ὑπὸ τῆς βῆτα συναρτήσεως διὰ τῆς σχέσεως $b = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

12. Νὰ εὑρεθῆ μία συνάρτησις $W(z)$ ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z > 0$ εἰς τὸ γραμμοσκιασθὲν μέρος τοῦ W-ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε: $z=-1 \longrightarrow W=-\beta$, $z=0 \longrightarrow w=ai$ καὶ $z=1 \longrightarrow W=\beta$ (βλ. Σχ. 1).
Διερευνήσατε τὴν περίπτωσιν, ὅταν $\beta \longrightarrow 0$



Σχ. 1

Λύσις: Αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι τοῦ γραμμοσκιασθέντος τμήματος εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B εἶναι π-α, ἡ δὲ γωνία εἰς τὴν κορυφὴν Γ θὰ εἶναι 2π-(π-2α)= =π+2α.

Ἐφαρμόζοντες τὸν μετασχηματισμὸν τῶν Schwartz- Christoffel λαμβάνομεν τελικῶς:

$$W = A\int_0^z (t+1)^{\frac{\pi-a}{\pi}-1}\cdot t^{\frac{\pi+2a}{\pi}-1}\cdot(t-1)^{\frac{\pi-a}{\pi}-1}\,dt + B = A\int_0^z \frac{t^{\frac{2a}{\pi}}dt}{(t^2-1)^{a/\pi}} = k\cdot\int_0^z \frac{t^{\frac{2a}{\pi}}dt}{(1-t^2)^{a/\pi}} + B$$

Ὅταν $z=0$, $w=a\cdot i$, τότε $B=ai$ καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται:

$$W = k\cdot\int_0^z \frac{t^{\frac{2a}{\pi}}dt}{(1-t^2)^{a/\pi}} + ai$$

Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς k δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῆς συναρτήσεως Γ, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι, ὅταν $z=1$, ἔχομεν $w=\beta$, ὅτε εὑρίσκομεν:

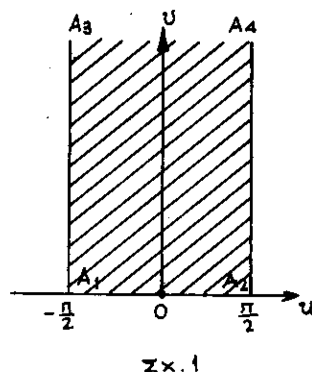
$$k=\frac{(\beta-a\cdot i)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{a}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{a}{\pi}\right)}$$

Ἐὰν $\beta\to 0$, τότε $a\to\frac{\pi}{2}$ καὶ τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα γίνεται:

$$w=ai-ai\int_0^z\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=ai\sqrt{1-z^2}=a\sqrt{z^2-1},$$

13. Νὰ προσδιορισθῇ μία συνάρτησις, ἡ ὁποία νὰ ἀπεικονίζῃ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z>0$ ἐπὶ τῆς ἡμιλωρίδος $-\frac{\pi}{2}<Re w<\frac{\pi}{2}$, $\Im m w>0$ (βλ. Σχ. 1). θεωροῦντες τὴν ἀντιστοίχισιν:

$$z(-1,1,\infty)\longrightarrow w\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\infty\right)$$



Σχ. 1

14. Εἰς ποῖον πεδίον ἡ συνάρτησις

$$w=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

ἀπεικονίζει τὸν μοναδιαῖον δίσκον $|z|<1$;

15. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $w(z)=\int_0^z(1-t^n)^{-\frac{2}{n}}dt$ μετασχηματίζει τὸν κύκλον $k(0,1)$ συμμόρφως εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος n-πλευράς καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου.

16. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $w=\int_0^z\frac{dt}{(1-t^6)^{1/3}}$ ἀπεικονίζει ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου κύκλου. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τοῦ ἑξαγώνου;

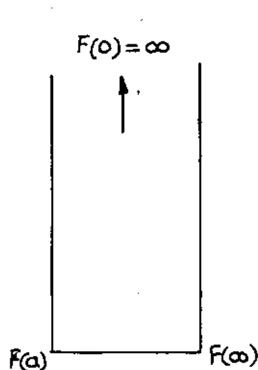
17. Νὰ εὑρεθῇ μία συνάρτησις, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ ἑνὸς τριγώνου μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα $w=0,1,i$ ἀντιστοιχοῦντα

εἰς τὰ σημεῖα $z=0,1,\infty$ ἀντιστοίχως.

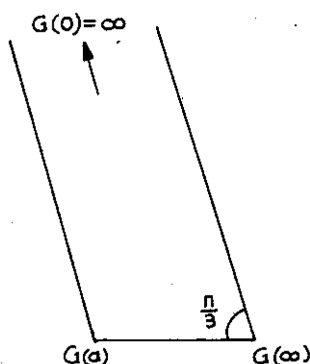
(Ἀπάντ. $w=\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}\cdot\int_0^z t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt$).

18. Νά ἀπεικονίσετε τό ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπί ἑνός ρόμβου μέ γωνίας $\pi\cdot a$, $\pi(1-a)$ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ κορυφαί του νά ἀντιστοιχοῦν εἰς τά σημεῖα $z=0,\mp1,\infty$. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος ℓ τῶν πλευρῶν του.
(Ἀπάντ. $W=\int_0^z t^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-t)^{-\frac{2}{3}}\,dt$, $\ell=\frac{1}{4}\left[\Gamma(a)\cdot\text{συν}\left(\frac{a\pi}{2}\right)\right]^{-1}\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{2}a\right)$).

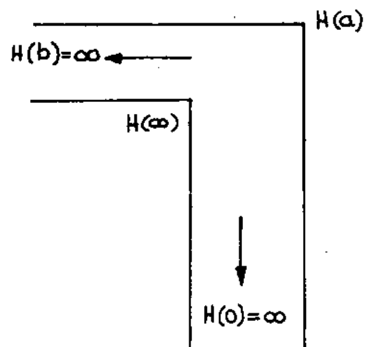
19. α) Ἡ συνάρτησις $F(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t\sqrt{t-a}}$, ὅπου z_0 εἶναι ἕνα αὐθαίρετον σταθερόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου $\Im m\, z>0$ καί $a>0$ μετασχηματίζει τό ἄνω ἡμιεπί-



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

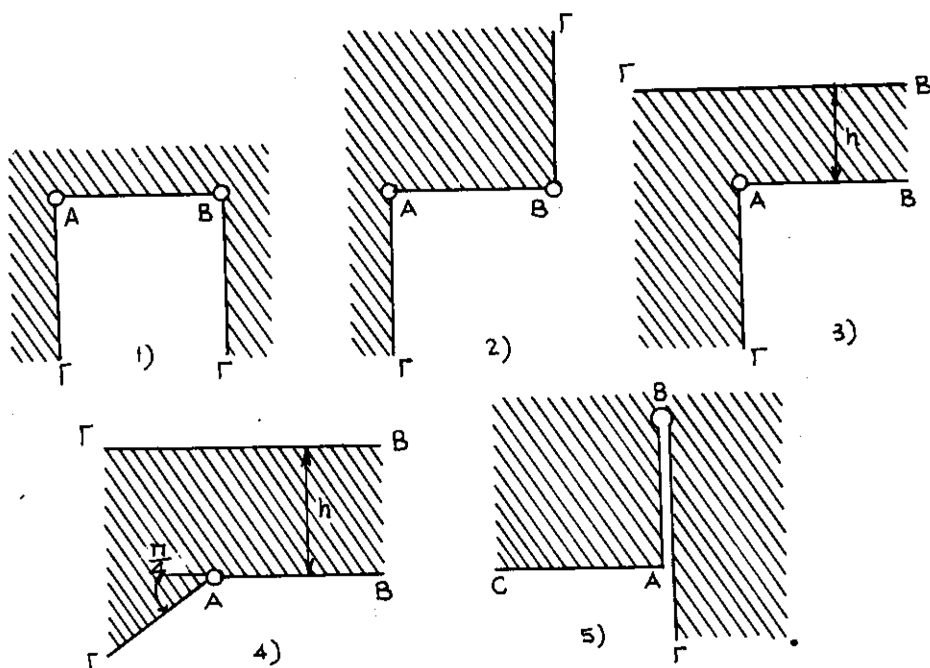
πεδον $\Im m\, z\geq0$ ἐπί τῆς ἡμιλωρίδος τῆς δεικνυομένης εἰς τό Σχ.1 πλάτους $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

β) Ἡ συνάρτησις $G(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t\cdot(t-a)^{1/3}}$ μετασχηματίζει τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z\geq0$ ἐπί τοῦ κλειστοῦ χωρίου τοῦ δεικνυομένου εἰς τό Σχ. 2

γ) Ἡ συνάρτησις $H(z)=\int_{z_0}^{z}\frac{dt}{t\cdot(t-a)^{1/2}(t-b)}$, ὅπου $0<a<b$ μετασχηματίζει τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z\geq0$ ἐπί τοῦ κλειστοῦ χωρίου τοῦ δεικνυομένου εἰς τό Σχ. 3. Προσδιορίσατε τά πλάτη τῶν δύο λωρίδων ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται αὐτό τό χωρίον.

20. Ἀπεικονίσατε τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im z > 0$ ἐπὶ τοῦ πεδίου τοῦ w-ἐπιπέδου μὲ τὴν κάτωθι ἑνὸς ἑκάστου σχήματος δεικνυομένην ἀντιστοίχισιν τῶν σημείων (βλ. Σχ. $1_1 - 1_5$).

1) $w\ (A=0,\ B=1,\ \Gamma=\infty) \longrightarrow z\ (0,1,\infty)$
2) $w\ (A=0,\ B=1,\ \Gamma=\infty) \longrightarrow z\ (0,1,\infty)$
3) $w\ (A=0,\ B=\infty,\ \Gamma=\infty) \longrightarrow z\ (0,1,\infty)$
4) $w\ (A=0,\ B=\infty,\ \Gamma=\infty) \longrightarrow z\ (0,1,\infty)$
5) $w\ (A=0,\ B=ia,\ \Gamma=\infty) \longrightarrow z\ (0,1,\infty)$



Σχ. 1

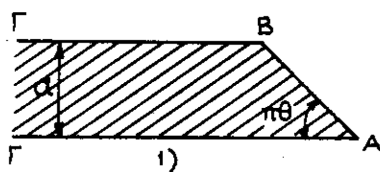
Ἀπάντησις:

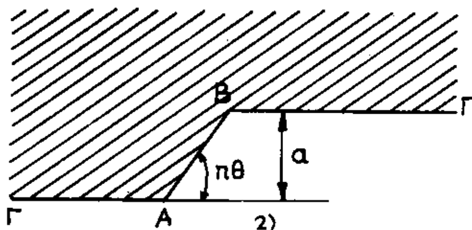
1) $w = \frac{2}{\pi}\left[\text{τοξημ}\sqrt{z} - (1-2z)\sqrt{z-z^2}\right]$
2) $w = \frac{2}{\pi}\left[\text{τοξημ}\sqrt{z} - \sqrt{z-z^2}\right]$
3) $w = \frac{h}{\pi}\left(\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - 2\sqrt{z}\right)$
4) $w = \frac{2h}{\pi}\left(\text{τοξεφ}\sqrt[4]{z} + \operatorname{artanh}\sqrt[4]{z} - 2\sqrt[4]{z}\right)$
5) $w = ia\left(-\sqrt{z}\,\frac{z-3}{2} - 1\right)$.

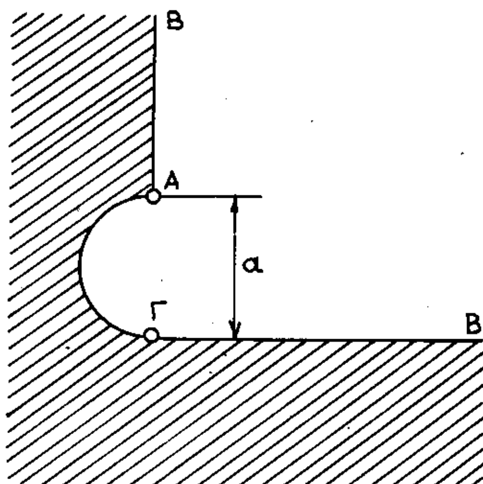
21. Ἀπεικονίσατε τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ είς τό χωρίον τοῦ W- ἐπιπέδου μέ τήν κάτωθι ἑνός ἑκάστου σχήματος δεικνυομένην ἀντιστοίχισιν $(0 < \theta < 1)$ (βλ. Σχ. 2_1-2_2).

1) $\quad W(A, B=0, \Gamma=\infty) \longrightarrow z(0,1,\infty)$

2) $\quad W(A, B=0, \Gamma=\infty) \longrightarrow z(0,1,\infty)$







Σχ. 2.

Ἀπάντησις:

1) $$W = -\frac{a}{\pi}\int_1^z \frac{dz}{z^{1-\theta}(z-1)^\theta}$$

2) $$W = \frac{a}{\pi\cdot\theta}\int_1^z \left(\frac{z-1}{z}\right)^\theta dz$$

22. Ἀπεικονίσατε τό ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπί τοῦ χωρίου τοῦ δεικνυομένου είς τό Σχ. 2_3 (τό τόξον ΑΓ εἶναι ἕνα ἡμικύκλιον) είς τρόπον, ὥστε:

$W(A=ai,\ B=\infty,\ \Gamma=0) \longrightarrow z(0,1,\infty)$.

Ὑπόδ. Χρησιμοποιήσατε τόν μετασχηματισμόν $\zeta = \frac{a}{W}$ καί μετά ἀναχθῆτε είς τήν ἄσκησιν 21 (2).

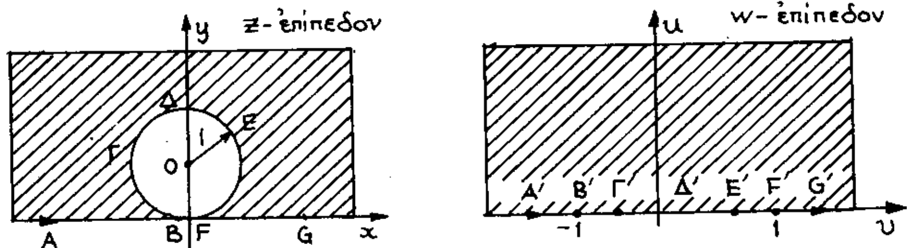
Ἀπάντησις:

$$W = \frac{a}{\zeta},\ \text{ὅπου}\ \zeta = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2t}{1-t^2} + \log\frac{1-t}{1+t}\right)\ \text{καί}\ t = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$$

III. Μετασχηματισμός συνόρων και διαφόρων χωρίων.

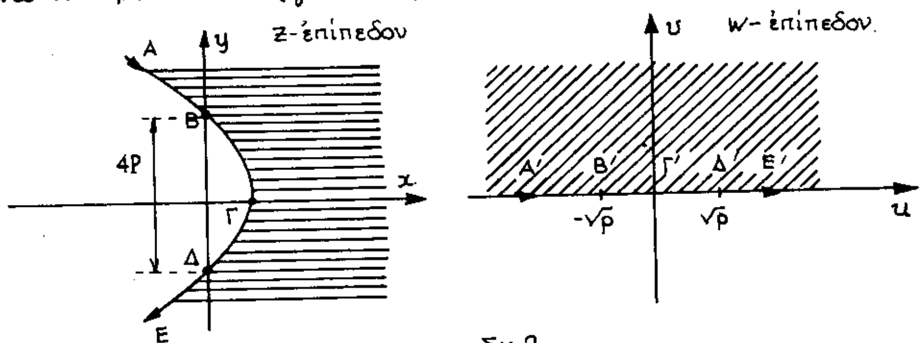
23. Νά εὑρεθῆ ὁ μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τήν ὑποκυκλοειδῆ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ἐπί μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Εἰς ποῖον χωρίον ἀπεικονίζεται τό ἐσωτερικόν τῆς ὑποκυκλοειδοῦς ὑπό τοῦ ἐν λόγῳ μετασχηματισμοῦ.

24. Δείξατε ὅτι ὁ μετασχηματισμός $W = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{z}\right)$ ἀπεικονίζει τό ἐξωτερικόν μέρος τοῦ μοναδιαίου κύκλου τοῦ διερχομένου διά τῆς ἀρχῆς τοῦ z-ἐπιπέδου εἰς τό ἡμιεπίπεδον $\Im m W > 0$ (βλ. Σχ. 1).
(Τά δεικνύμενα βέλη σημαίνουν ὅτι τά σημεῖα λαμβάνονται στό ∞).



Σχ. 1

25. Δίδεται ἡ παραβολή $y^2 = 4p(p - x)$. Δείξατε ὅτι ὁ μετασχηματισμός $W = i(\sqrt{z} - \sqrt{p})$ μετασχηματίζει τό γραμμοσκιασθέν ἐξωτερικόν μέρος τῆς παραβολῆς εἰς τό ἄνω w-ἡμιεπίπεδον ($\Im m W > 0$) (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET

§1. ΤΥΠΟΣ ΤΩΝ SCHWARTZ - POISSON

I. Τύπος τοῦ Schwartz.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(z)$, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ἀναλυτικὴ ἐπὶ τοῦ δίσκου $|z| \leq R$. Ἔστω ὅτι z εἶναι ἕνα τυχὸν σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας C μὲ ἐξίσωσιν $|z| = R$. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁλοκληρωτικὸν τύπον τοῦ Cauchy θὰ ἔχωμεν:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cdot\frac{\zeta}{\zeta - z}\, d\varphi\ , \qquad (1) \quad \text{ὅπου } \zeta = R\cdot e^{i\varphi}.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν z^* εἶναι ἕνα σημεῖον ἐκτὸς τῆς περιφερείας C, θὰ ἔχωμεν:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\, d\zeta \qquad (2)$$

Εἰδικῶς, ἐὰν λάβωμεν ὡς z^* τὸ συμμετρικὸν $\frac{R^2}{\bar z}$ τοῦ z ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν C καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\zeta\cdot\bar\zeta = R^2$, λαμβάνομεν:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\cdot\frac{\bar z}{\bar z - \bar\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ $d\zeta = R\cdot e^{i\varphi}\cdot i\,d\varphi \Longrightarrow \frac{d\zeta}{\zeta} = i\,d\varphi$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁ (3) γίνεται:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\frac{\bar z}{\bar z - \bar\zeta}\, d\varphi \qquad (4)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς σχέσεις (1) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(\zeta)\left[\frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar z}{\bar z - \bar\zeta}\right] d\varphi \qquad \text{ἤ}$$

θέτοντες $A = \frac{\zeta}{\zeta - z} - \frac{\bar z}{\bar z - \bar\zeta}$ (5), ἡ ἀνωτέρω σχέσις γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cdot A\cdot d\varphi \qquad (5')$$

Η (5) γράφεται:

$$A=\frac{\zeta}{\zeta-z}-\frac{\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\zeta}}=\frac{\zeta-z+z}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}=1+\frac{z}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}}$$

Οὕτω, ὁ A εἶναι προφανῶς ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Ὁμοίως διά προσθέσεως τῶν (1) καί (4) λαμβάνομεν:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cdot(1+Bi)\,d\varphi \qquad (6)$$

ὅπου

$$Bi=\frac{z}{\zeta-z}-\frac{\bar{z}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} \qquad (7)$$

Ἐκ τῆς (7) προκύπτει, ὅτι ὁ Bi εἶναι προφανῶς ἕνας καθαρός φανταστικός ἀριθμός.

Ἡ (6) γράφεται:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cdot Bi\,d\varphi \qquad (8)$$

Συμφώνως πρός τό Θεώρημα τῆς Μέσης τιμῆς (βλ. VI-4-6) ἤτοι:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+r\cdot e^{i\varphi})\,d\varphi$$

διά $a=0$ λαμβάνομεν:

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi \qquad (9)$$

Οὕτω, λόγω τῆς (9), ἡ (8) γράφεται:

$$f(z)=f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\cdot Bi\,d\varphi \qquad (10)$$

Ὑποθέτοντες ὅτι τό ζ εὑρίσκεται ἐπί τῆς περιφερείας $|z|=R$, δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$f(\zeta)=u(R,\varphi)+i\,v(R,\varphi) \qquad (11)$$

καί $f(z)=u(r,\theta)+i\,v(r,\theta)$ (12), ὅπου $z=r\cdot e^{i\theta}$.

Προφανῶς αἱ συναρτήσεις $u(r,\theta)$, $v(r,\theta)$ εἶναι ἁρμονικαί.

Λόγω τῶν (11) καί (12) ἡ (5) γράφεται:

$$u(r,\theta)+iv(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cdot A\,d\varphi+\frac{i}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}v(R,\varphi)\cdot A\,d\varphi \qquad (13)$$

Ἐξισώνοντες τά πραγματικά μέρη, ἐκ τῆς (13) λαμβάνομεν:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cdot A\,d\varphi \qquad (14)$$

Ὁμοίως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τάς (11) καί (12) καί ἐξισώνοντες τούς συντελεστάς τῶν φανταστικῶν μερῶν τῆς σχέσεως (10) λαμβάνομεν:

$$v(r,\theta)=v(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\;B\,d\varphi \qquad (15)$$

Ἐπειδή $A+Bi=\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$, διά προσθέσεως τῶν ἀντιστοίχων μελῶν τῶν (14) καί (15) λαμβάνομεν:

$$\boxed{f(z)=iv(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cdot\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\varphi} \qquad (16) \quad \zeta=R\cdot e^{i\varphi}$$

Ὁ τύπος (16) ἐκφράζει τήν τιμήν τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τό σημεῖον z καί καλεῖται *τύπος τοῦ Schwartz*.

II. Τύπος τοῦ Poisson:

Θέτοντες $z=r\cdot e^{i\theta}$ καί $\zeta=R\cdot e^{i\varphi}$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{R\cdot e^{i\varphi}+r\,e^{i\theta}}{R\,e^{i\varphi}-r\cdot e^{i\theta}}=\frac{(R\,\text{συν}\varphi+r\,\text{συν}\theta)+i\cdot(R\,\text{ημ}\varphi+r\,\text{ημ}\theta)}{(R\,\text{συν}\varphi-r\,\text{συν}\theta)+i\,(R\,\text{ημ}\varphi-r\,\text{ημ}\theta)} \qquad (17)$$

Τό πραγματικόν μέρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς σχέσεως (17) εἶναι:

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\,\text{συν}(\theta-\varphi)+r^2}=A \qquad (18)$$

καί ὁ συντελεστής τοῦ φανταστικοῦ εἶναι:

$$\frac{2Rr\,\text{ημ}(\theta-\varphi)}{R^2-2Rr\,\text{συν}(\theta-\varphi)+r^2}=B \qquad (19)$$

Οὕτω ὁ τύπος (14), λόγω τοῦ (18), γίνεται:

$$\boxed{u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cdot\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\,\text{συν}(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi} \qquad (20)$$

Ὁ τύπος (20) καλεῖται **ὁλοκληρωτικός τύπος τοῦ Poisson** διά τήν ἁρμονικήν συνάρτησιν $u(r,\theta)$.

Ὁμοίως ὁ τύπος (15), λόγω τοῦ (19), γίνεται:

$$v(r,\theta)=v(0)+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}u(R\cdot\varphi)\,\frac{2Rr\,\eta\mu(\theta-\varphi)}{R^2-2Rr\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi \qquad (21)$$

Οἱ τύποι (20) καί (21) παίζουν σπουδαιότατον ρόλον εἰς τήν θεωρίαν τῶν ἁρμονικῶν συναρτήσεων.

Ἡ ποσότης $A=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)+r^2}=Re\,\frac{Re^{i\varphi}+re^{i\theta}}{Re^{i\varphi}-re^{i\theta}}=\frac{R^2-|z|^2}{|R\cdot e^{i\varphi}-z|^2}$ (22) καλεῖται **πυρήν τοῦ Poisson**. Ὁ πυρήν εἶναι μηδέν διά τά z τῆς περιφερείας $|z|=R$ καί αὐστηρῶς θετικός διά τά z πού κεῖνται ἐντός αὐτῆς.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $f(z)\equiv 1$ διά $|z|\leq R$, τότε θά ἔχωμεν ὅτι $u(R,\varphi)=1$ καί ὁ τύπος (20) δίδει:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)+r^2}\,d\varphi=1 \qquad (23),\ r<R.$$

§ 2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ DIRICHLET.

Ὁρισμός XI-2-1. *Ἔστω G ἕνα πεδίον τοῦ Jordan, δηλ. ἕνα πεδίον τοῦ ὁποίου τό σύνορον εἶναι μία κλειστή καμπύλη τοῦ Jordan C καί ἔστω h(z) μία συνεχής πραγματική συνάρτησις ὡρισμένη ἐπί τῆς C. Τό πρόβλημα τοῦ Dirichlet συνίσταται εἰς τήν εὕρεσιν μιᾶς συναρτήσεως u(z), ἁρμονικῆς ἐντός τοῦ G καί τοιαύτης, ὥστε:*

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in G}}u(z)=h(z_0), \quad (1)$$

διά κάθε $z_0\in C$.

Τό ἀνωτέρω πρόβλημα εὑρίσκει πλείστας ἐφαρμογάς εἰς τήν Μαθηματικήν φυσικήν (Θεωρίαν Δυναμικοῦ).

Παρατήρησις: Ἐάν ἰσχύῃ ἡ (1), τότε θά λέγωμεν ὅτι "ἡ u(z) λαμβάνει τάς συνοριακάς της τιμάς h(z) ἐπί τῆς C".

Ἡ συνάρτησις, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρός τήν $u(z)$ ἐντός τοῦ G καί πρός τήν $h(z)$ ἐπί τῆς C, εἶναι αὐτομάτως συνεχής ἐπί τοῦ $\overline{G}$, διότι ἡ $u(z)$ εἶναι ἁρμονική ἐντός τοῦ G καί ὡς ἐκ τούτου καί συνεχής.

I. Τό πρόβλημα τοῦ Dirichlet διά τόν μοναδιαῖον δίσκον.

Θά ἐπιλύσωμεν τό πρόβλημα τοῦ Dirichlet εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν ἑνός δίσκου μέ ἀκτῖνα τήν μονάδα καί ἔχοντος τό κέντρον του εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων. Οὕτω τό πεδίον G εἶναι ὁ δίσκος $|z|<1$ καί ἡ καμπύλη C εἶναι ἡ περιφέρεια $|z|=1$.

Θεώρημα XI-2-1. Ἔστω ὅτι G εἶναι ὁ μοναδιαῖος δίσκος $|z|<1$ καί C εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος $|z|=1$ καί ἔστω ὅτι $h(z)=h(e^{i\varphi})$ εἶναι μία συνεχής πραγματική συνάρτησις ἐπί τῆς C. Τότε ἡ ἁρμονική συνάρτησις $u(r\cdot e^{i\theta})$ $(r<1)$ ἡ διδομένη ὑπό τοῦ τύπου: $u(r,\theta)\equiv u(re^{i\theta})=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(e^{i\varphi})}{1+r^2-2r\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)}d\varphi$ (2)

εἶναι ἡ μοναδική λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διά τό πεδίον G, λαμβάνουσα τάς συνοριακάς τιμάς $h(e^{i\varphi})$ ἐπί τῆς περιφερείας C.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι:

$u(re^{i\theta})\longrightarrow h(e^{i\theta_0})$ (3) καθώς τό $r\longrightarrow 1$ καί $\theta\longrightarrow\theta_0$

($0<r<1$ καί θ_0: σταθερόν)

Θέτομεν χάριν ἁπλότητος $h(e^{i\theta})=h(\theta)$ καί λόγω τοῦ (2) θά ἔχωμεν:

$$u(e^{i\theta})-h(\theta)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\varphi)}{1+r^2-2r\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)}\,d\varphi-h(\theta)\qquad(4)$$

Λόγω τοῦ τύπου (23) τῆς § 1, διά $R=1$, θά ἔχωμεν:

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\theta)}{1+r^2-2r\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)}\,d\varphi=1\cdot h(\theta)=h(\theta)$$

καί οὕτω ὁ (4) γράφεται:

$$u(e^{i\theta})-h(\theta)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\varphi)-h(\theta)}{1+r^2-2r\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)}\,d\varphi\qquad(5)$$

Ἐπειδή ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἰς τόν τύπον (5) εἶναι περιοδική

περιόδου 2π, οὗτος δύναται νά γραφῇ καί ὡς ἑξῆς:

$$u(e^{i\theta})-h(\theta)=\frac{1-\tau^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\theta+a)-h(\theta)}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}\,da \qquad (6),$$

ὅπου ἐθέσαμεν $\varphi-\theta=a$.

Ἔστω δ ἕνας ἀριθμός τοιοῦτος, ὥστε: $0<\delta<\pi$ καί ἔστω $M=\max\limits_{0\le\theta\le 2\pi}|h(\theta)|$, $\omega(\delta,\theta)=\max\limits_{|a|\le\delta}|h(\theta+a)-h(\theta)|$ τότε θά ἔχωμεν:

$$\left|\frac{1-\tau^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{h(\theta+a)-h(\theta)}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}\,da\right|\le\omega(\delta,\theta)\cdot\frac{1-\tau^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{da}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}$$

$$<\omega(\delta,\theta)\cdot\frac{1-\tau^2}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{da}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}=\omega(\delta,\theta)\cdot\frac{1-\tau^2}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{1-\tau^2}=\omega(\delta,\theta) \qquad (7)$$

Λαμβάνοντες ἐκ νέου ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (23) τῆς §1, διά $R=1$ καί τό γεγονός ὅτι διά μίαν ὁλοκληρωτέαν συνάρτησιν $g(\theta)$ ἐπί τοῦ διαστήματος $-\pi\le\theta\le\pi$ ἰσχύει:

$$\int_{\delta\le|\theta|\le\pi}g(\theta)d\theta=\int_{-\pi}^{-\delta}g(\theta)d\theta+\int_{\delta}^{\pi}g(\theta)\,d\theta, \quad ^{1)}$$

θά ἔχωμεν διαδοχικῶς τάς κάτωθι ἀνισότητας:

$$\left|\frac{1-\tau^2}{2\pi}\int_{\delta\le|a|\le\pi}\frac{h(\theta+a)-h(\theta)}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}\,da\right|\le 2M\,\frac{1-\tau^2}{2\pi}\cdot\int_{\delta\le|a|\le\pi}\frac{da}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}$$

$$\le 2M\,\frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\cdot\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu\delta}<2M\cdot\frac{\pi-\delta}{\pi}\cdot\frac{1-\tau^2}{2\tau-2\tau\,\sigma\upsilon\nu\delta}<\frac{M}{\tau}\cdot\frac{1-\tau^2}{1-\sigma\upsilon\nu\delta} \qquad (8)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$|u(\tau e^{i\theta})-h(\theta)|=\left|\frac{1-\tau^2}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\theta+a)-h(\theta)}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}\,da\right|$$

$$\le\left|\frac{1-\tau^2}{2\pi}\cdot\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h(\theta+a)-h(\theta)}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}\,da\right|+\frac{1-\tau^2}{2\pi}\left|\int_{\delta\le|a|\le\pi}\frac{h(\theta+a)-h(\theta)}{1+\tau^2-2\tau\,\sigma\upsilon\nu a}\,da\right|$$

---

1) *Καθ' ὅτι τό* $\int_{\delta\le|\theta|\le\pi}g(\theta)d\theta$ *σημαίνει τό ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρωμάτων* $\int_{-\pi}^{-\delta}g(\theta)d\theta$ *καί* $\int_{\delta}^{\pi}g(\theta)d\theta$.

(Λόγω τῶν (7) καί (8) ἔχομεν:

$$\leq \omega(\delta,\theta)+\frac{M}{r}\cdot\frac{1-r^2}{1-\text{συν}\delta} \qquad (9)$$

Κατ' ἀκολουθίαν λόγω τῆς (9) ἔχομεν:

$$\left|u(e^{i\theta})-h(\theta_0)\right| \leq \left|u(e^{i\theta})-h(\theta)\right| + \left|h(\theta)-h(\theta_0)\right|$$

$$\leq \omega(\delta,\theta)+\frac{M}{r}\cdot\frac{1-r^2}{1-\text{συν}\delta}+\left|h(\theta)-h(\theta_0)\right| \qquad (10)$$

ὅπου ἀμφότερα τά $\omega(\delta,\theta)\to 0$ καθώς τό $\delta\to 0$ καί $\left|h(\theta)-h(\theta_0)\right|\to 0$ καθώς τό $\theta\to\theta_0$, λόγω τῆς συνεχείας τῆς $h(z)$ ἐπί τῆς περιφερείας C.

Ἤδη ἄν θέσωμεν: $\delta=\sqrt[4]{1-r^2}$, τότε τό $\delta\to 0$, ὅταν τό $r\to 1$. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{M}{r}\cdot\frac{1-r^2}{1-\text{συν}\delta}=\frac{2M}{r}\cdot\sqrt{1-r^2}\left(1+\frac{1}{12}\sqrt{1-r^2}+\cdots\right)\longrightarrow 0 \text{ τοῦ } r\longrightarrow 1.$$

Ὅθεν, τό δεξιόν μέλος τῆς ἀνισότητος (10) τείνει πρός τό μηδέν, τοῦ $r\to 1$ καί τοῦ $\theta\to\theta_0$. Μέ ἄλλα λόγια, ἐάν $z=r\cdot e^{i\theta}\to e^{i\theta_0}$, τότε $\lim\limits_{z\to e^{i\theta_0}} u(z)=h(\theta_0)$.

Ὡς πρός τό μονοσήμαντον, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ εἶναι δύο ἁρμονικαί συναρτήσεις ἐντός τοῦ G καί ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$ ἐπί τοῦ συνόρου C τοῦ πεδίου G. Τότε ἡ συνάρτησις $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ εἶναι μηδέν ἐπί τῆς περιφερείας.

Ἡ $u(x,y)$ εἶναι ἁρμονική ἐντός τοῦ G καί συνεχής ἐντός τοῦ $\overline{G}$ καί ἐπί πλέον εἶναι μηδέν ἐπί τοῦ συνόρου (περιφερείας) τοῦ G. Τότε συμφώνως πρός τό Πόρισμα VI-6-1 ἡ $u(x,y)$ θά εἶναι μηδέν παντοῦ ἐντός τοῦ $\overline{G}$ ἤτοι: $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$ διά κάθε $(x,y)\in G$.

II. Τό πρόβλημα τοῦ Dirichlet διά τό ἄνω ἡμιεπίπεδον ($\Im m\, z>0$).

Θεώρημα XI-2-2. Ἔστω G παριστᾷ τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z>0$ καί C τόν πραγματικόν ἄξονα καί $h(z)=h(x)$ εἶναι μία συνεχής πραγματική συνάρτησις ἐπί τοῦ ἄξονος C. Τότε ἡ συνάρτησις

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt \qquad (11)$$

εἶναι ἡ μοναδική λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διά τό πεδίον G λαμ-

βάνουσα τάς συνοριακάς της τιμάς $h(x)$ ἐπί τοῦ ἄξονος C.

Ἀπόδειξις: Ἀπεικονίζομεν τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m\, z > 0$ συμμόρφως ἐπί τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ μοναδιαίου κύκλου $|w|<1$ εἰς τρόπον, ὥστε τό σημεῖον $z_0 = x_0 + iy_0$ $(y_0>0)$ νά ἀπεικονίζεται εἰς τό σημεῖον $w=0$ καί ὁ πραγματικός ἄξων: $-\infty < x < +\infty$ νά ἀπεικονίζεται ἐπί τῆς περιφερείας $|w|=1$. Πρός τούτοις ἀρκεῖ νά λάβωμεν τόν κάτωθι μετασχηματισμόν

$$w = f(z) = \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \quad (12) \quad (z=x+iy)$$

(βλέπε σχετικῶς Κεφ. V, §4).

Ἔστω $z=\varphi(w)$ ὁ ἀντίστροφος τοῦ γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ (12). Τότε ἡ συνάρτησις $h^*(w) = h(\varphi(w))$ εἶναι συνεχής ἐπί τοῦ κύκλου $|w|=1$, ὡς σύνθεσις συνεχῶν συναρτήσεων. Ἔστω $u^*(w)$ εἶναι ἡ μοναδική λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διά τόν δίσκον $|w|<1$ καί τῶν συνοριακῶν τιμῶν $h^*(w)$ καί ἡ ὁποία δίδεται ὑπό τοῦ τύπου (2) τοῦ Θεωρήματος XI-2-1 καί ἔστω $u(z) = u^*(f(z))$. Τότε ἡ συνάρτησις $u(z)$ εἶναι ἁρμονική ἐντός τοῦ G κατά τήν Πρότασιν XI-6-4 καί λαμβάνει τάς ἀπαιτουμένας συνοριακάς τιμάς, ἤτοι: $h^*(f(x)) = h(x)$ ἐπί τοῦ ἄξονος C.

Σκοπός μας εἶναι νά δόσωμεν ἕναν τύπον διά τήν συνάρτησιν $u(z)$. Πρός τούτοις εἰς τόν τύπον (2) τοῦ θεωρήματος τοῦ Dirichlet, ἐφ' ὅσον θεωρήσωμεν ἀντί τῶν συναρτήσεων h καί u τάς h^* καί u^* ἀντιστοίχως, ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως $u^*(w)$ διά $w=0$, δηλ. $r=0$ θά δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$u^*(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^*(e^{i\varphi})\, d\varphi \qquad (13)$$

Τό σημεῖον τοῦ κύκλου $|w|=1$ τό ἀντιστοιχοῦν εἰς τό σημεῖον x τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος x, εἶναι τό σημεῖον $e^{i\varphi}$ τῆς περιφερείας πού πληροῖ τήν ἐξίσωσιν:

$$e^{i\varphi} = \frac{x-z_0}{x-\bar{z}_0} \quad (x: \text{πραγματικός}) \quad (14)$$

Ἐκ τῆς (14) λαμβάνομεν:

$$i e^{i\varphi}\, d\varphi = \frac{z_0-\bar{z}_0}{(x-\bar{z}_0)^2}\cdot dx \qquad \text{ἤ}$$

$$d\varphi = \frac{1}{i}\,\frac{x-\bar{z}_0}{x-z_0}\cdot\frac{z-\bar{z}_0}{(x-\bar{z}_0)^2}\,dx = \frac{2y_0}{|x-z_0|^2}\,dx = \frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,dx \quad (15)$$

Εἰς τήν σχέσιν $u^*(f(z)) = u(z)$ θέτοντες $z=z_0$ λαμβάνομεν: $u^*(f(z_0)) = u(z_0)$ ἤ $u(z_0) = u^*(0)$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (13) τό $d\varphi$ διδόμενον ὑπό τῆς (15) καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $h^*(e^{i\varphi}) = h^*(w) = h(x)$, λαμβάνομεν.

$$u(z_0) = \frac{y_0}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,dx$$

καί γενικῶς: θεωροῦντες τό σημεῖον $z = x+iy$ $(y>0)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἡμιεπιπέδου $\Im m z > 0$ ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται ὡς ἀκολούθως, ἐφ' ὅσον τήν μεταβλητήν x τοῦ ἀνωτέρω τύπου τήν συμβολίσομεν π.χ. μέ τό σύμβολον t.

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt$$

Τό Θεώρημα ὅθεν ἀπεδείχθη πλήρως.

<u>**Παρατηρήσεις**</u>: 1η/. Πολλάς φοράς τό πρόβλημα τοῦ Dirichlet διά τό ἄνω ἡμιεπίπεδον ($\Im m z > 0$) διατυποῦται ὡς ἀκολούθως:

Νά λυθῆ τό πρόβλημα τῶν συνοριακῶν τιμῶν.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y>0$$

καί $\lim\limits_{y\to 0+} u(x,y) = h(x)$, ὅπου ἡ $f(x)$ εἶναι ὡρισμένη καί συνεχής διά $-\infty < x < +\infty$.

Ἡ λύσις αὐτοῦ θά γίνῃ ἐπί τῇ βάσει τῶν τύπων τοῦ Dirichlet.

2α/. Συχνά δέ τό πρόβλημα τῶν συνοριακῶν τιμῶν διά ἕναν κύκλον ἀκτῖνος R ἐμφανίζεται καί ὑπό τήν κάτωθι μορφήν:

Νά λυθῆ ἡ διαφορική ἐξίσωσις τοῦ Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{διά } r<R$$

καί $u(R,\theta) = h(\theta)$.

Ἐάν $R=1$, ἡ συνθήκη τῶν συνοριακῶν τιμῶν γράφεται $u(1,\theta) = h(\theta)$.

Ἐφαρμογαί 1η/. Νά εὑρεθῆ μία ἁρμονική συνάρτησις ἐπί τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου τοῦ z ($\mathcal{J}m z>0$) καί ἡ ὁποία λαμβάνει τάς ὡρισμένας τιμάς ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x τάς διδομένας ὑπό τοῦ τύπου $h(x)=\begin{cases} 1, & \text{ἐάν } x>0 \\ 0, & \text{» } x<0 \end{cases}$

<u>Λύσις</u>: Ἡ ζητουμένη συνάρτησις παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου (11) τοῦ θεωρήματος XI-2-2, ἤτοι:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{(t-x)^2+y^2}\cdot dt=\frac{y}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{0}\frac{0\cdot dt}{(t-x)^2+y^2}+\frac{y}{\pi}\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2}=$$

$$\frac{1}{\pi}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{t-x}{y}\right)\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{x}{y}\right).$$

2α/. Νά εὑρεθῆ μία ἁρμονική συνάρτησις ἐντός τοῦ κύκλου $|z|=1$ καί λαμβάνουσα τάς καθωρισμένας τιμάς ἐπί τῆς περιφερείας του τάς διδομένας ὑπό τῆς συναρτήσεως $h(e^{i\varphi})=\begin{cases} 1, & \text{ἐάν } 0<\varphi<\pi \\ 0, & \text{» } \pi<\varphi<2\pi. \end{cases}$

<u>Λύσις</u> Συμφώνως πρός τόν τύπον (2) τοῦ θεωρήματος XI-2-1 θά ἔχωμεν:

$$u(\tau,\theta)=\frac{1-\tau^2}{2\pi}\cdot\int_{0}^{2\pi}\frac{h(e^{i\varphi})}{1+\tau^2-2\tau\,\text{συν}(\theta-\varphi)}\,d\varphi$$

$$=\frac{1-\tau^2}{2\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}\frac{d\varphi}{1+\tau^2-2\tau\,\text{συν}(\theta-\varphi)}=1-\frac{1}{\pi}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2\tau\,\text{ημ}\theta}{1-\tau^2}\right).$$

<u>Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις:</u>

1. Δείξατε ὅτι: α) Ἡ συνάρτησις $U(\tau,\theta)=\frac{2}{\pi}\,\text{τοξεφ}\left(\frac{2\tau\,\text{ημ}\theta}{1-\tau^2}\right)$, $0<\tau<1$, $0\leq\theta<2\pi$ εἶναι ἁρμονική ἐντός τοῦ κύκλου $|z|=1$.

   β) $$\lim_{\tau\to 1-}U(\tau,\theta)=\begin{cases} 1, & \text{ἐάν } 0<\theta<\pi \\ -1, & \text{ἐάν } \pi<\theta<2\pi \end{cases}$$

2. Νά εὑρεθῆ μία συνάρτησις $u(x,y)$, ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονική εἰς τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\mathcal{J}m z>0$ καί ἡ ὁποία λαμβάνει τάς τιμάς ἐπί τοῦ

ἄξονος τῶν x τάς διδομένας ὑπό τοῦ τύπου, $h(x)=\begin{cases}-1, \text{ ἐάν } x<0\\ 1 \text{ ἐάν } x>0\end{cases}$
(πρόβλημα τοῦ Dirichlet).
(Ἀπάντ: $u(x,y)=1-\left(\frac{2}{\pi}\right)\cdot$ τοξ εφ$\left(\frac{y}{x}\right)$).

3. Ὁμοίως, ὡς ἀνωτέρω, διά τήν συνάρτησιν:

$$h(x)=\begin{cases}-1, & \text{ἐάν } x<-1\\ 0, & \text{ἐάν } -1<x<1\\ 1, & \text{ἐάν } x>1\end{cases}$$

(Ἀπάντ: $u(x,y)=1-\frac{1}{\pi}$ τοξ εφ $\left(\frac{y}{x+1}\right)-\frac{1}{\pi}$ τοξ εφ $\left(\frac{y}{x-1}\right)$).

4. Νά εὑρεθῆ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διά τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z>0$ καί συνοριακάς τιμάς $v(t)$, ὅπου ἡ συνεχής συνάρτησις $v(t)$ μηδενίζεται ἐντός τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

5. Νά λυθῆ τό κάτωθι πρόβλημα τῶν συνοριακῶν τιμῶν:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ y>0 \quad (\text{Διαφορική ἐξίσωσις τοῦ Laplace})$$

$$\text{καί} \quad \lim_{y\to 0+} u(x,y)=h(x)=\begin{cases}a_0 & \text{ἐάν } x<-1\\ a_1 & \text{''} \quad -1<x<+1\\ a_2 & \text{''} \quad x>1,\end{cases}$$

ὅπου a_0, a_1, a_2 εἶναι σταθεραί
(Ὑπόδ: βλ. παρατήρησιν §2)

6. Ἔστω $f(z)$ εἶναι μία ἀναλυτική συνάρτησις εἰς τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z>0$ καί ἔστω $\zeta=\xi+i\eta$ ἕνα σημεῖον αὐτοῦ τοῦ ἡμιεπιπέδου. Δείξατε ὅτι:

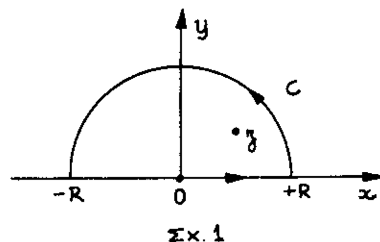
$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\cdot f(x)}{(x-\xi)^2+\eta^2}\cdot dx$$

Θέτοντες $f(\zeta)=u(\xi,\eta)+iv(\xi,\eta)$ δείξατε ὅτι ὁ ἀνωτέρω τύπος ἰσοδυναμεῖ μέ τούς κάτωθι:

$$\left.\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\cdot u(x,0)}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx\\ v(\xi,\eta)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\cdot v(x,0)}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx\end{aligned}\right\}$$

(Τύποι τοῦ Poisson διά τό ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z>0$)

Ἀπόδειξις: Ἔστω C τό σύνορον τοῦ ἡμικυκλίου ἀκτῖνος R (βλ. Σχ. 1) καί ζ ἕνα ἐσωτερικόν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐπειδή ἡ C ἐγκλείει τό ζ δέν θά ἐγκλείει τό $\bar{\zeta}$ καί ὡς ἐκ τούτου θά ἔχωμεν:



Σχ. 1

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz, \quad 0=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\bar{\zeta}}\,dz$$

Διά προσθέσεων τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων λαμβάνομεν:

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\left\{\frac{1}{z-\zeta}-\frac{1}{z-\bar{\zeta}}\right\}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(\zeta-\bar{\zeta})\,f(z)\,dz}{(z-\zeta)\cdot(z-\bar{\zeta})}$$

Εἶναι $\zeta=\xi+i\eta$, $\bar{\zeta}=\xi-i\eta$ καί ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται:

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-R}^{R}\frac{\eta\cdot f(x)\,dx}{(x-\xi)^2+\eta^2}+\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\Gamma}\frac{\eta\cdot f(z)\,dz}{(z-\zeta)\cdot(z-\bar{\zeta})},$$

ὅπου Γ εἶναι τό ἡμικύκλιον τῆς καμπύλης C.
Ὑποθέτοντες ὅτι $R\to\infty$ τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος τείνει πρός τό μηδέν καί ὡς ἐκ τούτου λαμβάνομεν:

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\cdot f(x)\,dx}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$

7. Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις $u(r,\theta)$ ἁρμονική ἐντός τοῦ κύκλου $K(0,1)$, συνεχής ἐπί τῆς περιφερείας αὐτοῦ καί τοιαύτη, ὥστε ἐπί τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου νά λαμβάνει τάς τιμάς $h(e^{i\varphi})=\text{συν}^2\varphi$.

8. Ἐάν θέσωμεν $\zeta=R\cdot e^{i\varphi}$, $z=r\cdot e^{i\theta}$, τότε ὡς γνωστόν θά ἔχωμεν:

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(R^2-r^2)+2iRr\,\text{ημ}(\theta-\varphi)}{R^2-2Rr\,\text{συν}(\varphi-\theta)+r^2}$$

Τότε διά χρησιμοποιήσεως αὐτῆς τῆς ἰσότητος δείξατε ὅτι:

i) $$u(r,\theta) = u(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \,\sigma\upsilon\nu\, n\theta + b_n \,\eta\mu\, n\theta)$$

ii) $$v(r,\theta) = v(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (-b_n \,\sigma\upsilon\nu\, n\theta + a_n \,\eta\mu\, n\theta)$$

iii) $$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad f(0) = u(0) + iv(0)$$

ὅπου: $$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\,\sigma\upsilon\nu\, n\varphi \, d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\,\eta\mu\, n\varphi \, d\varphi$$

9. Ἐπιλύσατε τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet διὰ τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$. Δείξατε ὅτι, ἡ τιμὴ τῆς λύσεως εἰς τὸ ἄπειρον ἰσοῦται πρὸς τὴν μέσην τιμὴν τῶν συνοριακῶν τιμῶν ἐπὶ τοῦ κύκλου.

10. Δείξατε τὴν κάτωθι ἐναλλακτικὴν ἰσοδυναμίαν τοῦ τύπου τοῦ Schwartz (16) τῆς §1, ἤτοι:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \, dz - \overline{f(z_0)}$$

Ἀκολούθως διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ ἀνωτέρω τύπου διὰ τὸν δίσκον $G: |z| < 1$ καὶ τὴν περιφέρειαν $C: |z| = 1$, εὕρατε τὴν μοναδικὴν συνάρτησιν $u(z)$ ἁρμονικὴν ἐντὸς τοῦ G τοιαύτην, ὥστε:

$$\lim_{z \to e^{i\varphi_0}} \frac{\partial u(z)}{\partial r} = h(e^{i\varphi_0}) \quad (0 \le \varphi_0 \le 2\pi),$$

ὅπου $\frac{\partial u}{\partial r}$ εἶναι ἡ ἀκτινικὴ παράγωγος τῆς u καὶ $h(z)$ εἶναι δοθεῖσα συνάρτησις συνεχὴς ἐπὶ τῆς περιφερείας C.

(πρόβλημα τοῦ Neumann διὰ τὸ χωρίον G)

11. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις u ἁρμονικὴ καὶ φραγμένη ἐντὸς τοῦ $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\}$, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς $-h$ ἐπὶ τοῦ $(-\infty,-1]$ καὶ ἰσοῦται πρὸς h ἐπὶ τοῦ $[1,+\infty)$.

('Υπόδ: Θεωρήσατε τήν ἀπεικόνισιν $z=\frac{1}{2}(w+w^{-1})$, ὅπου $\mathcal{J}m\,w>0$. κ.τ.λ.
Εἶναι $u(z)=2h\left[\frac{1}{2}-\pi^{-1}\arg\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\right]$, $\mathcal{J}m\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)>0$

12. Νά λυθῆ τό πρόβλημα τοῦ Dirichlet $\nabla^2 u=0$ διά τό χωρίον $G=\{z:|z|\leq 1,\ \mathcal{J}m\,z\geq 0\}$ εἰς τρόπον, ὥστε $u(x,y)=0$, ὅταν $y=0$, καί $-1<x<1$ καί $u(x,y)=1$, ὅταν $x^2+y^2=1$.

13. Νά εὑρεθῆ μία συνάρτησις $\phi(x,y)$ ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονική εἰς τό πρῶτον τέταρτον $x>0$, $y>0$ καί ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τάς συνοριακάς συνθήκας $\phi(x,0)=e^{-x}$, $\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0}=0$.

14. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ U εἶναι μία πραγματική συνάρτησις τοῦ $t\in(-\infty,+\infty)$ τοιαύτη ὥστε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|U(t)|}{1+|t|}\,dt<+\infty$$

Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις

$$u(z)=\frac{y}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$

εἶναι ἁρμονική εἰς τό ἄνω ἡμιεπίπεδον καί $\lim_{z\to t_0}u(z)=U(t_0)$ διά κάθε σημεῖον συνεχείας t_0 τῆς U.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΩΡΙΣΜΕΝΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΦΥΣΙΚΗΝ

§1. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΡΟΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

I. Θεωροῦμεν τὴν κίνησιν ἑνὸς ἀσυμπιέστου ρευστοῦ (δηλ. ἑνὸς ὑγροῦ ἢ ἑνὸς ἀερίου) διὰ μέσου δοθέντος χωρίου. Ὑπὸ τὸν ὅρον ***πεδίον ταχυτήτων ἢ ροήν*** ἐννοοῦμεν μίαν διανυσματικὴν συνάρτησιν δίδουσα τὴν ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ εἰς κάθε σημεῖον τοῦ δοθέντος χωρίου εἰς κάθε χρονικὴν στιγμήν. Μία ροὴ θὰ καλῆται **σταθερή**, ἐὰν αὐτὴ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου καὶ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Μία ροὴ θὰ λέγωμεν, ὅτι εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα σταθερὸν ἐπίπεδον Π, ἐὰν ἡ διεύθυνσις τοῦ πεδίου ταχυτήτων εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π ἢ ἰσοδυνάμως ἐὰν ἡ ροὴ (δηλ. ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις) δὲν ἔχει συνιστώσας καθέτους πρὸς τὸ Π.

Προφανῶς δὲν βλάπτεται ἡ γενικότης τοῦ θέματος, ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς ἐπίπεδον Π τὸ ἐπίπεδον oxy δηλ. τὸ z-ἐπίπεδον.

Οὕτω μία σταθερὴ παράλληλος ροὴ χαρακτηρίζεται ὑπὸ μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y ἢ ἰσοδυνάμως ὑπὸ μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως:

$$W(z) = U(x,y) + i\,V(x,y) \qquad (1)$$

ὅπου $U(x,y)$ εἶναι ἡ x-συνιστῶσα τῆς ροῆς καὶ $V(x,y)$ εἶναι ἡ y-συνιστῶσα αὐτῆς, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς παριστάνουσα τὴν ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ στὸ σημεῖο (x,y). Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ θεωροῦμεν πάσας τὰς ροὰς σταθερὰς καὶ παραλλήλους πρὸς τὸ z-ἐπίπεδον.

Σχήματα κατασκευασθέντα εἰς τὸ z-ἐπίπεδον ἑρμηνεύονται ὡς ἀπεικονίζοντα ἀντιστοίχους κυλίνδρους μὲ ἄξονας καθέτους εἰς αὐτὸ τὸ ἐπίπεδον[1].

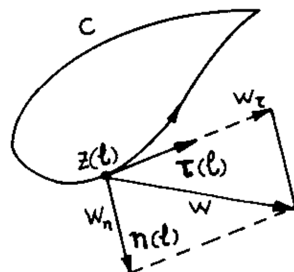
Ὑπάρχει πάντοτε μία πραγματικὴ συνάρτησις $\phi(x,y)$ καλουμένη δυναμικὸν ταχύτητος τοιαύτη, ὥστε:

$$U(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \; V(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (2)$$

II. Ἔστω ἡ ροὴ $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ ὡρισμένη εἰς ἕνα πεδίον G τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔστω ὅτι C εἶναι μία κλειστὴ λεία καμπύλη τοῦ Jordan μήκους ℓ περιεχομένη ἐντὸς τοῦ G (βλ. Σχ. 1) τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἶναι·

1) *Π.χ. Ὁ κύκλος εἰς τὸ z-ἐπίπεδον παριστᾷ ἕνα ἀπείρου μήκους κυλινδρικὸν ἀντικείμενον πέριξ τοῦ ὁποίου λαμβάνει χώρα ἡ ροή.*

ἤ $z = z(\ell) = x(\ell) + i\,y(\ell)$. $(0 \leq \ell \leq t)$ καί ἔστω $\tau(\ell)$ τό μοναδιαῖον ἐφαπτομενικόν διάνυσμα τῆς C ἔχον φοράν τήν ἰδίαν πρός αὐτήν πού αὐξάνει τό μῆκος τοῦ τόξου ἀπό ἕνα σταθερόν σημεῖον μέ ἕναν ὡρισμένον προσανατολισμόν. Ἔστω $\eta(\ell)$ τό μοναδιαῖον (ἐξωτερικόν) κάθετον διάνυσμα τῆς C εἰς τό σημεῖον $z(\ell)$. Τότε τό $\tau(\ell)$ ἔχει συνιστώσας $\frac{dx}{d\ell}$, $\frac{dy}{d\ell}$, οὕτως, ὥστε νά ἔχωμεν:



Σχ. 1

$$\tau(\ell) = z'(\ell) = \frac{dx}{d\ell} + i\frac{dy}{d\ell} \quad (3), \text{ ὅπου } |\tau(\ell)| = 1$$

Εἶναι δέ καί

$$\eta(\ell) = \frac{1}{i}\, z'(\ell) = \frac{dy}{d\ell} - i\frac{dx}{d\ell} \qquad (4)$$

Ἀναλύομεν τήν ροήν $W = U(x,y) + i\,V(x,y)$ εἰς δύο συνιστώσας κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἐφαπτομενικοῦ καί καθέτου διανύσματος τῆς C εἰς τό σημεῖον $z(\ell)$, παριστῶντες τάς συνιστώσας ταύτας διά τῶν $W\tau$, Wn ἀντιστοίχως (βλ. Σχ. 1). Οὕτω θά ἔχωμεν:

$$W = W_\tau \cdot \tau + W_n \cdot \eta \qquad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐσωτερικῶς ἐπί τ τήν (5) λαμβάνομεν:

$$W_\tau = W \cdot \tau \qquad (6) \quad \text{ἤ}$$

ἐπειδή $W = (U, V)$ καί $\tau = \left(\frac{dx}{d\ell}, \frac{dy}{d\ell}\right)$, ἡ (6) δίδει:

$$W_\tau = U \cdot \frac{dx}{d\ell} + V\frac{dy}{d\ell} \qquad (7)$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν:

$$W_n = U\frac{dy}{d\ell} - V\frac{dx}{d\ell} \qquad (8)$$

III. Ἤδη ἄς ὑποθέσωμεν τήν ὕπαρξιν καί τήν συνέχειαν τῶν μερικῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων $U(x,y)$, $V(x,y)$ εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου R, τό ὁποῖον περικλείεται ὑπό τῆς καμπύλης C.

Ὑπό τόν ὅρον *κυκλοφορίαν τοῦ ρευστοῦ πέριξ* τῆς C καλοῦμεν τό κάτωθι ὁλοκλήρωμα:

$$\oint_c W_\tau \, dl = \oint_c \left(U \cdot \frac{dx}{dl} + V \frac{dy}{dl} \right) dl = \oint_c U dx + V dy \quad (9)$$

Ὑπό τόν ὅρον *ροήν τοῦ ρευστοῦ διά μέσου τῆς* C καλοῦμεν τό κάτωθι ὁλοκλήρωμα :

$$\oint_c W_n \, dl = \oint_c \left(U \frac{dy}{dl} - V \frac{dx}{dl} \right) dl = \oint_c U dy - V dx \quad (10)$$

Ἐάν τό ὁλοκλήρωμα (9) γίνεται μηδέν διά κάθε καμπύλη C τοῦ ἀνωτέρω τόπου, τότε τό πεδίον θά καλῆται *ἀστρόβιλον* ἤ *ἐλεύθερον κυκλοφορίας* ἐντός τοῦ G.

Ἐπειδή $\oint_c \overline{W} dz = \oint_c \overline{(U + iV)} \, (dx + idy) = \oint_c U dx + V dy + i \cdot \oint_c U dy - V dx$

αἱ (9) καί (10) γράφονται ἀντιστοίχως ὡς ἀκολούθως:

$$\oint_c U dx + V dy = Re \oint_c \overline{W} \, dz \quad (9')$$

$$\oint_c U dy - V dx = \Im m \oint_c \overline{W} dz \quad (10')$$

Οἱ (9′) καί (10′) δίδουν ἀντιστοίχως τήν κυκλοφορίαν πέριξ τῆς C καί τήν ροήν διά μέσου τῆς C. Ἐάν ἡ (10) μηδενίζεται διά κάθε καμπύλη C τοῦ ἀνωτέρω τόπου, τότε τό πεδίον θά καλῆται *σωληνοειδές* ἐντός τοῦ G.

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦ Green διά τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (10) λαμβάνομεν:

$$\oint_c U dy - V dx = \iint_R \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right] dx \, dy, \quad (11)$$

ὅπου R εἶναι ἕνα κλειστόν χωρίον μέ σύνορον τήν C.

Τέλος, ἐάν τό πεδίον εἶναι σωληνοειδές, τό διπλοῦν ὁλοκλήρωμα τῆς (11) θά εἶναι μηδέν καί ἵνα συμβαίνη αὐτό, ἀρκεῖ νά ἰσχύη:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (12).$$

Ἡ ἐξίσωσις (12) καλεῖται *ἐξίσωσις τῆς συνεχείας*.

IV. Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καί (12) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (13)$$

Ἐκ τῆς (13) ἕπεται, ὅτι ἡ συνάρτησις $\phi(x,y)$ εἶναι ἁρμονική καί ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει ἡ συζυγής ἁρμονική αὐτῆς, ἤτοι ἡ $\psi(x,y)$.

Ἔστω $$\Omega(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y) \qquad (14)$$

Ἡ $\Omega(z)$ εἶναι προφανῶς μία ἀναλυτική συνάρτησις. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \phi}{\partial y} = U - iV \qquad (15)$$

(Συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann)

Ὅθεν, ἡ ταχύτης, λόγω τῆς (15) θά εἶναι:

$$W(z) = U(x,y) + iV(x,y) = \overline{U - iV} = \overline{\Omega'(z)} \qquad (16)$$

Ἔχει δέ αὕτη μέτρον ϑ τό κάτωθι:

$$|\vartheta| = \sqrt{U^2 + V^2} = |\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)| \qquad (17)$$

Τά σημεῖα εἰς τά ὁποῖα ἡ ταχύτης εἶναι μηδέν καλοῦνται *στατικά σημεῖα*.

Ἡ συνάρτησις $\Omega(z)$ εἶναι θεμελιώδους σημασίας διά τόν χαρακτηρισμόν τῆς ροῆς καί καλεῖται *μιγαδικόν δυναμικόν*.

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\Omega(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις ϕ, ψ πληροῦν τάς συνθήκας τῶν Cauchy-Riemann, ἤτοι:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Εἶναι δέ, $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -\frac{\partial \phi}{\partial y}dx + \frac{\partial \phi}{\partial x}dy$.

Ὅθεν, $$\psi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial \phi(\tau,t)}{\partial x}d\tau + \frac{\partial \phi(\tau,t)}{\partial y}dt \qquad (18)$$

<u>Ὁ τύπος</u> (18) <u>μᾶς δίδει τήν ἁρμονικήν συζυγήν τῆς</u> $\phi(x,y)$.

Τά σημεῖα z διά τά ὁποῖα $\Omega'(z) = 0$ καλοῦνται *σημεῖα ἀκινησίας τῆς ροῆς*.

V. Ἐάν θεωρήσωμεν τάς μονοπαραμετρικάς οἰκογενείας τῶν γραμμῶν

$$\phi(x,y)=a, \quad \psi(x,y)=b \qquad (19)$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις ϕ, ψ εἶναι ἁρμονικαί συζυγεῖς καί a, b παράμετροι, τότε αἱ δύο οἰκογένειαι εἶναι ὀρθογώνιοι μεταξύ των δηλ. κάθε γραμμή τῆς μιᾶς οἰκογενείας τέμνει ὀρθογωνίως πάσας τάς γραμμάς τῆς ἄλλης οἰκογενείας.

Πράγματι, διαφορίζοντες τήν $\phi(x,y)=a$ ὡς πρός x λαμβάνομεν $\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ καί ἡ κλίσις τῆς $\phi(x,y)=a$ εἰς τό σημεῖον (x,y) εἶναι $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial y}$. Ὁμοίως ἡ κλίσις τῆς $\psi(x,y)=b$ εἰς τό (x,y) εἶναι $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial y}$.

Ὅθεν, τό γινόμενον τῶν κλίσεων, διά χρησιμοποιήσεως τῶν συνθηκῶν τῶν Cauchy- Riemann, εἶναι:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=-1 \qquad (20)$$

Οὕτω αἱ θεωρηθεῖσαι δύο καμπύλαι τῶν οἰκογενειῶν τέμνονται ὀρθογωνίως.

Αἱ καμπύλαι τῆς οἰκογενείας $\phi(x,y)=a$ καλοῦνται *ἰσοδυναμικαί γραμμαί*, ἐνῶ αἱ καμπύλαι τῆς οἰκογενείας $\psi(x,y)=b$ καλοῦνται *ρευματικαί γραμμαί*.

Ἡ δέ συνάρτησις $\psi(x,y)$ καλεῖται *συνάρτησις ρεύματος*.

Συμφώνως πρός τήν πρώτην ἐξίσωσιν (19) διά τάς ἰσοδυναμικάς γραμμάς θά ἔχωμεν τήν διαφ. ἐξίσωσιν:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy=U(x,y)\,dx+V(x,y)\,dy=0 \qquad (21)$$

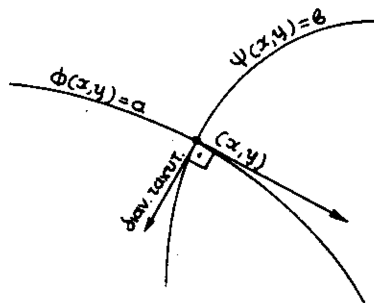
Ὁμοίως, λόγῳ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων (19), αἱ ρευματικαί γραμμαί θά πληροῦν τήν κάτωθι διαφ. ἐξίσωσιν:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy=-V(x,y)\,dx+U(x,y)\,dy=0 \qquad (22)$$

Εἰς κάθε σημεῖον (x,y) τῆς ροῆς (ἐκτός ἀπό τά στατικά σημεῖα) ἡ ταχύτης εἶναι κάθετος πρός τήν ἰσοδυναμικήν γραμμήν τήν διερχομένην διά τοῦ (x,y) καί ἐφαπτομενική πρός τήν ρευματικήν γραμμήν τήν διερχομένην διά τοῦ (x,y).

Πράγματι, ἔστω $\phi(x,y)=a$ (βλ. Σχ. 1) ἡ ἰσοδυναμική ἡ διερχομένη διά

τοῦ σημείου (x,y). Τό ἐφαπτομενικόν διάνυσμα ταύτης εἰς τό (x,y) θά ἔχη κλίσιν τήν $y' = -\dfrac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}$, τό δέ διάνυσμα τῆς ταχύτητος εἰς τό (x,y) θά ἔχη κλίσιν τήν $\dfrac{V}{U} = \dfrac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}$. Τό δέ γινόμενον τῶν συντελεστῶν κατευθύνσεως τῶν δύο διανυσμάτων εἶναι -1. Ὅθεν, ταῦτα τέμνονται καθέτως. Διά χρησιμοποιήσεως τῶν συνθηκῶν τῶν Cauchy-Riemann ἀποδεικνύομεν καί τή δεύτερη ἰδιότητα.



Σχ. 1

VI. Εἰς τήν ἀναπτυχθεῖσαν ἀνωτέρω θεωρίαν ὑποθέσαμεν, ὅτι δέν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ z- ἐπιπέδου εἰς τά ὁποῖα ἐμφανίζεται ἤ ἐξαφανίζεται ὑγρόν. Τοιαῦτα σημεῖα καλοῦνται *πηγαί* ἤ *φρέατα* ἀντιστοίχως.

Εἰς τοιαῦτα σημεῖα, τά ὁποῖα εἶναι ἰδιάζοντα σημεῖα, τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα (10) εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός διά κάθε κλειστήν καμπύλην C, ἡ ὁποία ἐγκλείει τοιαῦτα σημεῖα. Ἐάν $2\pi q\,dt$ εἶναι ἡ αὔξησις ἤ ἐλάττωσις ἐκ τῆς πηγῆς ἤ τοῦ φρέατος τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ εἰς χρόνον dt, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ τιμή τοῦ ἐπικαμπυλίου ὁλοκληρώματος (10) θά ἰσοῦται πρός $2\pi q$.

Ἐπί πλέον εἰς τοιαῦτα σημεῖα δέν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις τῆς συνεχείας (18) καί κατ' ἀκολουθίαν δέν ἰσχύει καί ἡ ἐξίσωσις τοῦ Laplace (13).

<u>Παραδείγματα</u>: 1ον/. Ἡ γραμμική συνάρτησις:

$$\Omega(z) = C\cdot z,\ (z = x+iy)$$

δύναται νά θεωρηθῆ ὡς τό μιγαδικόν δυναμικόν τῆς ροῆς καταλαμβάνουσα ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον. Λόγω δέ τῆς σχέσεως (16), ἡ ταχύτης θά εἶναι:

$$W(z) = \overline{\Omega'(z)} = \bar{C},\ \text{εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.}$$

Ἤτοι ἡ ταχύτης εἶναι σταθερά παντοῦ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου.

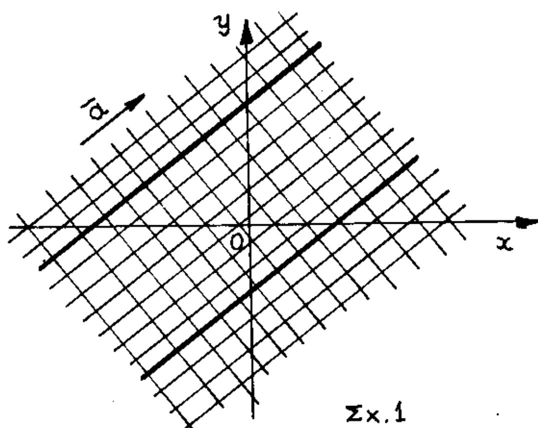
Θέτοντες $C = \alpha + i\beta$ (ὅπου α, β πραγματικοί ἀριθμοί) τό μέτρον τῆς σταθερᾶς ταχύτητος εἶναι $|\vartheta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (14) ἔχομεν:

$\Phi(x,y)+i\,\Psi(x,y)=(a+i\beta)(x+iy)$ ἢ $\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)=(ax-\beta y)+i(\beta x+ay)$.

Ὅθεν, τὸ δυναμικὸν τῆς ταχύτητος καθὼς καὶ ἡ συνάρτησις ρεύματος θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $\Phi(x,y)=ax-\beta y$, $\Psi(x,y)=\beta x+ay$.

Αἱ δὲ ἰσοδυναμικαὶ γραμμαὶ καθὼς καὶ αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως, (βλ. Σχ.1), $ax-\beta y=c_1$ καὶ $\beta x+ay=c_2$ ὅπου c_1, c_2 σταθεραί.



Σx.1

Ὅπως φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ σχήματος τὰ δύο συστήματα τῶν γραμμῶν εἶναι εὐθεῖαι καὶ τέμνονται καθέτως. Ἡ αὐτὴ συνάρτησις $\Omega(z)=cz$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν διὰ μίαν ὁμοιόμορφον ροὴν ἐντὸς μιᾶς λωρίδος τῆς ὁποίας τὸ σύνορον συνίσταται ἐκ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{a}$.

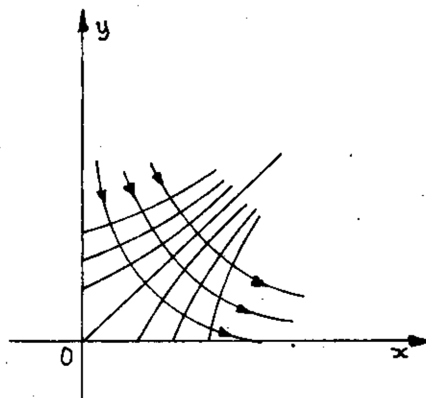
2ον/ Ἡ συνάρτησις $\Omega(z)=z^2$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν τῆς ροῆς καταλαμβάνουσα ὁλόκληρον τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον. Εἶναι δὲ $W(z)=\overline{\Omega'(z)}=2\bar{z}$.

Εἶναι δέ, $\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)=(x+iy)^2$, $(z=x+iy)$ ἢ

$$\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)=x^2-y^2+i\cdot 2xy$$

Ὅθεν, τὸ δυναμικὸν τῆς ταχύτητος καθὼς καὶ ἡ συνάρτησις ρεύματος θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\Phi(x,y)=x^2-y^2,\quad \Psi(x,y)=2xy.$$



Σx.2

Καὶ τὸ ἀντίστοιχον σύστημα τῶν ἰσοδυναμικῶν καὶ τῶν ρευματικῶν γραμμῶν εἶναι:

$x^2-y^2=c_1$, $2xy=c_2$ (c_1, c_2 : σταθεραί). Ἤτοι τό σύστημα συνίσταται ἐκ δύο οἰκογενειῶν ἰσοσκελῶν ὑπερβολῶν τεμνομένων καθέτως. Ἡ ἰδία συνάρτησις παριστᾶ τό μιγαδικόν δυναμικόν τῆς ροῆς τῆς λαμβανούσης χώραν εἰς τό πρῶτον τέταρτον τοῦ ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 2) δι' αὐτήν τήν περίπτωσιν.

3ον/. Ἔστω ὅτι τό μιγαδικόν δυναμικόν εἶναι τῆς μορφῆς: $\Omega(z)=a\cdot\log z$, (1) ὅπου ὡς λογάριθμον λαμβάνομεν τήν πρωτεύουσαν τιμήν καί ὁ a εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός. Θεωροῦντες τήν ἐκθετικήν μορφήν τοῦ z ἤτοι τήν $z=r\cdot e^{i\varphi}$, θά ἔχωμεν $\log z=\log r+i\cdot\varphi$. Οὕτω $\Omega(z)=a\log r+i\cdot a\cdot\varphi$. Συνεπῶς τό δυναμικόν τῆς ταχύτητος καθώς καί ἡ συνάρτησις ρεύματος θά εἶναι ἀντιστοίχως.

$$\Phi(x,y)=a\cdot\log r,\quad \psi(x,y)=a\cdot\varphi \quad (2)$$

Αἱ δέ ἰσοδυναμικαί γραμμαί καθώς καί αἱ ρευματικαί γραμμαί θά εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\log r=\frac{c_1}{a},\quad \varphi=\frac{c_2}{a} \quad (3) \quad (c_1, c_2 \text{ σταθεραί})$$

ἤτοι ὁμόκεντροι κύκλοι καί εὐθεῖαι διερχόμεναι διά τῆς ἀρχῆς ἀντιστοίχως.

Τό δέ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι:

$$|v|=|\overline{\Omega'(z)}|=\left|\frac{a}{z}\right|=\frac{|a|}{r} \quad (4)$$

καί τό διάνυσμα τῆς ταχύτητος ἔχει τήν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος $\varphi=$ σταθ.

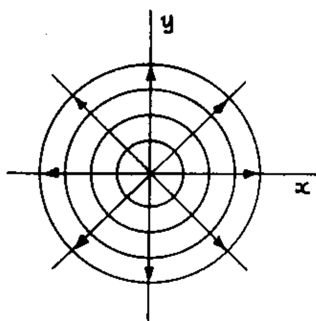
Ἐκ τῆς σχέσεως (4) παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τήν ἀρχήν τό μέτρον τῆς ταχύτητος καθίσταται ἄπειρον. Οὕτω τό σημεῖον $z=0$ εἶναι ἕνα ἰδιάζον σημεῖον τῆς συναρτήσεως $\Omega(z)$ πού δίδει τό μιγαδικόν δυναμικόν.

Οὕτω, ἐάν $a>0$, ἔχομεν εἰς τό σημεῖον $z=0$ πηγήν (ἤ ἄλλως θετικήν πηγήν) καί ἡ ταχύτης διευθύνεται ἀπό τήν ἀρχήν πρός τά ἔξω (βλ. Σχ. 3α), ἐνῶ, ἐάν $a<0$, ἔχομεν εἰς τό σημεῖον $z=0$ φρέαρ (ἤ ἄλλως ἀρνητικήν πηγήν) καί ἡ ταχύτης διευθύνεται ἐκ τῶν ἔξω πρός τήν ἀρχήν. Τά κάτωθι σχήματα δεικνύουν ἐπίσης τάς ἰσοδυναμικάς καί ρευματικάς γραμμάς.

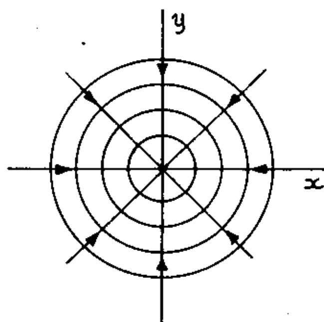
Ἡ κυκλοφορία πέριξ μιᾶς κλειστῆς καμπύλης C, βάσει τῶν τύπων (9) καί (16), θά εἶναι:

$$\oint_c U dx + V dy = \mathrm{Re}\oint_c \overline{W} dz = \mathrm{Re}\oint_c \Omega'(z)\, dz =$$

$$= \mathrm{Re}\oint_c (a \cdot \log z)' dz = \mathrm{Re}\cdot a \cdot \oint_c \frac{dz}{z} = \mathrm{Re}\cdot a\, 2\pi i = 0$$



Σx. 3a



Σx. 3β

῾Η δὲ ροὴ διὰ μέσου τῆς C, βάσει τῶν τύπων (10′) καὶ (16), θὰ εἶναι:

$$\oint_c U dy - V dx = \mathfrak{Im}\oint_c \overline{W} dz = \mathfrak{Im}\oint_c (a \log z)' dz = \mathfrak{Im}\, a \cdot \oint_c \frac{dz}{z} = \mathfrak{Im}\, a\, 2\pi i = 2\pi a.$$

§2. <u>Η ΡΟΗ ΠΕΡΙΞ ΕΝΟΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BLASIUS</u>

I. Θεωροῦμεν ἕνα ρευστὸν τὸ ὁποῖον κινεῖται ἀρχικῶς μὲ μίαν σταθερὰν ταχύτητα V_0. Ἀκολούθως τοποθετοῦμεν καθέτως πρὸς τὸ σταθερὸν ἐπίπεδον πρὸς τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἡ κίνησις τοῦ ρευστοῦ ἕνα ἀντικείμενον. Τὸ πρόβλημά μας εἶναι νὰ μελετήσωμεν τὴν κίνησιν τοῦ ρευστοῦ μετὰ τὴν τοποθέτησιν αὐτοῦ τοῦ ἀντικειμένου.

Μία γενικὴ ἀρχὴ περιλαμβάνουσα αὐτὸν τὸν τύπον τοῦ προβλήματος εἶναι νὰ παραστήσωμεν τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν τῆς ροῆς, μετὰ τὴν τοποθέτησιν τοῦ ἀντικειμένου, ὅτι ἔχει τὴν μορφήν:

$$\boxed{\Omega(z) = V_0 z + G(z)} \qquad (1)$$

(ἐὰν ἡ ροὴ γίνεται εἰς τὸ z-ἐπίπεδον) καὶ ἡ συνάρτησις G(z) εἶναι τοιαύτη, ὥστε $\lim_{|z|\to\infty} G'(z) = 0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ἐκ τῆς φυσικῆς σκοπιᾶς, ὅτι ἡ

ροή εἰς μίαν ἀρκούντως μεγάλη ἀπόστασιν ἐκ τοῦ ἀντικειμένου ἔχει ταχύτητα τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι σταθερόν καί ἴσον πρός V_0.

Παριστῶντες τήν ταχύτητα εἰς τό ∞ διά W_∞, διά τόν τύπον τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος θά ἔχωμεν:

$$W(z) = U(x,y) + i\,V(x,y) = \overline{\Omega'(z)} = \overline{V_0} + \overline{G'(z)} \quad \text{ἤ}$$

$$\overline{W(z)} = V_0 + G'(z) \quad \text{ἤ} \quad \overline{W_\infty} = \lim_{|z|\to\infty} \overline{W(z)} = V_0 + \lim_{|z|\to\infty} G'(z) = V_0 + 0.$$

Ὅθεν,

$$\boxed{\overline{W_\infty} = V_0} \qquad (2)$$

Προσέτι, τό μιγαδικόν δυναμικόν δύναται νά ἐκλεγῆ εἰς τρόπον, ὥστε μία τῶν ρευματικῶν γραμμῶν νά παριστᾷ τό σύνορον αὐτοῦ τοῦ ἀντικειμένου ἐπί τοῦ z - ἐπιπέδου.

II. Ροή πέριξ κυκλικοῦ κυλίνδρου.

Ἄς θεωρήσωμεν τό κλασσικόν παράδειγμα τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου μέ μοναδιαῖα ἀκτῖνα, ὅστις τοποθετεῖται εἰς ἕνα εὐρύ στρῶμα τῆς ροῆς ρευστοῦ μέ ὁμαλή ταχύτητα, ἔστω U_0, καί τοῦ ὁποίου (κυλίνδρου) ὁ ἄξονας εἶναι κάθετος πρός τήν διεύθυνσιν τῆς ροῆς. Διά νά μελετήσωμεν τήν ροήν πέριξ τοῦ κυλίνδρου παριστῶμεν τόν κύλινδρον ὑπό τοῦ κύκλου $x^2+y^2=1$ καί ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ροή μακρά τοῦ κυλίνδρου εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x. Λόγῳ τῆς συμμετρίας, ὁ ἄξων τῶν x ὁ εὑρισκόμενος ἐκτός τοῦ κύκλου δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἕνα σύνορον καί ὡς ἐκ τούτου τό ἄνω μέρος τοῦ σχήματος ὡς τόπος τῆς ροῆς (βλ. Σχ. 2).

Τό σύνορον αὐτοῦ τοῦ χωρίου τῆς ροῆς συνίσταται ἀπό τήν ἄνω ἡμιπεριφέρεια καί τό μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x ἐξωτερικοῦ αὐτοῦ τοῦ κύκλου. Τό σύνορον τοῦτο ὑπό τοῦ μετασχηματισμοῦ:

$$W = z + \frac{1}{z} \quad (1) \quad (W = u + iv)$$

ἀπεικονίζεται εἰς ὁλόκληρον τόν ἄξονα τῶν u, τό δέ χωρίον εἰς τό ὁποῖον λαμ-

θάνει χώραν ή ροή άπεικονίζεται είς τό ήμιεπίπεδον $\Im m W = v \geq 0$, όπως δεικνύεται είς τό Σχ. 15 σελ. 259. Έπειδή ή ροή έχει σταθεράν ταχύτητα V_0, τό μιγαδικόν δυναμικόν τής ροής είς τό W- έπίπεδον θά είναι:

$$\Omega(W) = v_0 W \quad (2)$$

Όθεν, λόγω τών (1) καί (2), τό μιγαδικόν δυναμικόν τής ροής διά τό χωρίον πέριξ τού κύκλου θά είναι:

$$F(z) = v_0 \left(z + \frac{1}{z}\right) \quad (3)$$

Ή δέ ταχύτης τής ροής πέριξ τού κύκλου είναι:

$$v = \overline{F'(z)} = v_0\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right) \quad (4)$$

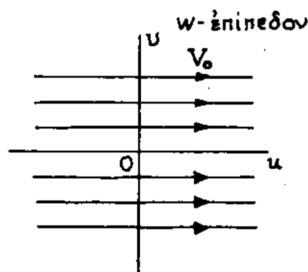
καί ή όποία καθώς τό $|z|$ αύξάνει ή U "πλησιάζει" τήν ταχύτητα v_0· αύτό σημαίνει, ότι διά τά σημεία είς μεγάλην άπόστασιν άπό τόν κύκλον ή ροή είναι όμοιόμορφος.

Εύκόλως διαπιστούται, ότι αί ρευματικαί γραμμαί είς σύστημα πολικών συντεταγμένων θά είναι:

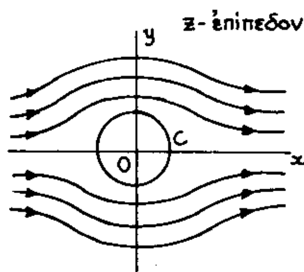
$$v_0\left(r - \frac{1}{r}\right) \eta\mu\theta = c \quad (5)$$

όπου c: σταθερά (βλ. Σχ.2). Άς σημειωθή ότι διά c=0 ή ρευματική γραμμή είναι ό κύκλος $r=1$ καί τό τμήμα τού x μέ $|x| \geq 1$.

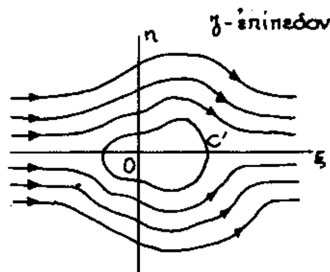
Άναλόγως, έάν ή $z = F(\zeta)$ άπεικονίζη τήν c καί τό έξωτερικόν μέρος αύτής τό εύρισκόμενον άνω τού z-ήμιεπιπέδου έπί τής C' καί τού έξωτερικού του μέρους αύτής τού εύρισκομένου άνω τού ζ- ήμιεπιπέδου (βλ. Σχ.3), τότε τό μιγαδικόν δυναμικόν διά τήν ροήν τού Σχ.3 έπιτυγχάνεται άντικαθιστώντες τό z ύπό τής $F(\zeta)$ είς τήν σχέσιν (3).



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

Τό μιγαδικόν δυναμικόν δύναται έπίσης νά έπιτευχθή άναχωρούντες άπ' εύ-

θείας ἀπό τό W- ἐπίπεδον εἰς τό ζ- ἐπίπεδον χρησιμοποιοῦντες ἕναν κατάλληλον μετασχηματισμόν.

Παρατήρησις: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ γνῶσις τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως εἶναι συχνάκις χρήσιμος διά τήν εὕρεσιν τοῦ μιγαδικοῦ δυναμικοῦ μιᾶς ροῆς πέριξ ἑνός ἀντικειμένου τοποθετημένου ἐντός τῆς ροῆς.

Τά ἀνωτέρω εὑρίσκουν μεγάλην ἐφαρμογήν καί εἰς τήν ἀεροδυναμικήν, κυρίως δέ εἰς τήν κίνησιν ἀεροπλάνου. Πρός τούτοις, ἡ κίνησις ἀεροπλάνου ἐντός ἠρέμου ἀτμοσφαίρας δύναται νά θεωρηθῆ ὡς πραγματοποιοῦσα μίαν ἐπίπεδον καί ὁμοιόμορφον ροήν ἔχουσα (ἡ ροή) ταχύτητα ἴσην πρός τήν σταθεράν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου, ἔστω U_0 καί τό ὁποῖον θεωροῦμεν ἐν προκειμένω ἀκίνητον. Εἰς τήν παροῦσαν περίπτωσιν ἐξαιρετικόν ἐνδιαφέρον παρουσιάζει τό πρόβλημα τῆς ροῆς περί ἕνα ἐμπόδιον σχήματος τῶν πτερύγων τοῦ ἀεροπλάνου.

Θεώρημα XII-2-1. (Νόμος τοῦ Bernoulli).

Ἐάν $P=P(x,y)$ εἶναι ἡ πίεσις τῆς ροῆς εἰς τό σημεῖον (x,y), W τό μιγαδικόν δυναμικόν τῆς ροῆς καί ρ ἡ πυκνότης τοῦ ρευστοῦ (ὑποθέτοντες ὅτι αὐτή εἶναι σταθερά), τότε κατά μῆκος κάθε ρευματικῆς γραμμῆς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$P+\frac{1}{2}\rho\,|W|^2=K \qquad (3),$$

ὅπου K σταθερά ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν ρευματικήν γραμμήν: Ἤ ἰσοδυνάμως:

$$P+\frac{1}{2}\rho\,v^2=K \qquad (3')$$

ὅπου v εἶναι τό μέτρον τῆς ταχύτητος τῆς ροῆς.

Θεώρημα XII-2-2. (Blasius). Ἔστω ὅτι τό $\Omega(z)$ παριστᾶ τό μιγαδικόν δυναμικόν περιγράφον τήν ροήν πέριξ ἑνός κυλινδρικοῦ ἀντικειμένου μοναδιαίου ὕψους μέ ἄξονα κάθετον πρός τό ἐπίπεδον z τῆς ροῆς καί τοῦ ὁποίου τό σύνορον εἰς τό z- ἐπίπεδον εἶναι ἡ τμηματικῶς λεία καμπύλη C. Τότε:

1ον/ Ἡ δύναμις ἡ προερχομένη ἐκ τῆς πιέσεως τοῦ ρευστοῦ ἐπί τοῦ ἀντικειμένου δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

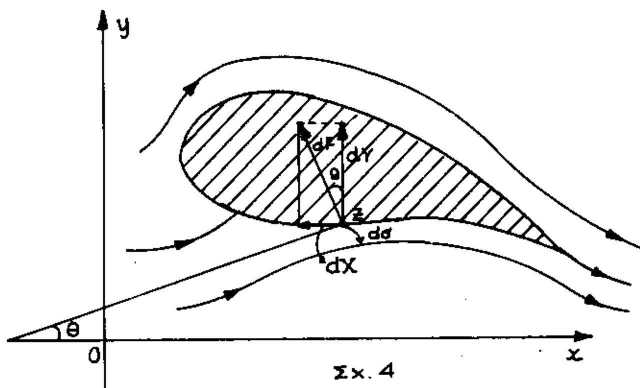
$$\bar{F}=X-iY=\frac{1}{2}\,i\,\rho\oint_C\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2dz \qquad (1)$$

ὅπου X καί Y εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς δυνάμεως λαμβανόμεναι κατά τήν θετικήν διεύθυνσιν τῶν ἀξόνων x καί y ἀντιστοίχως καί ρ ἡ πυκνότης τοῦ ρευστοῦ.

2ον/ Ἐάν Μ παριστᾶ τήν ὁλικήν ροπήν ὡς πρός τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων τῶν πιέσεων ἐπί τοῦ ἀντικειμένου, αὕτη θά δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$M=\mathrm{Re}\left\{-\frac{1}{2}\rho\oint_c z\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz\right\}.$$

Ἀπόδειξις: Ἡ δύναμις ἡ ἐπιδρῶσα ἐπί τοῦ στοιχειώδους τόξου μήκους $d\ell$ (βλ. Σχ. 4) εἶναι κάθετος πρός τό στοιχεῖον $d\ell$ διευθυνομένη ἐκ τῶν ἔξω πρός τά μέσα καί τό μέτρον αὐτῆς θά εἶναι $dF=P\cdot d\ell$, ὅπου P εἶναι ἡ πίεσις εἰς τό σημεῖον $z=x+iy$. Ἀναλύοντας αὐτήν τη δύναμιν εἰς συνιστώσας παραλλήλους πρός τούς ἄξονας οx, οy καί λαμβάνοντες τάς συνιστώσας κατά τήν θετικήν διεύθυνσιν τῶν ἀξόνων θά ἔχωμεν:



Σχ. 4

$$dF=dX+idY=-Pd\ell\,\eta\mu\theta+i\cdot P\cdot d\ell\,\sigma\upsilon\nu\theta=i\cdot Pd\ell\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\,\eta\mu\theta)=i\cdot Pd\ell\, e^{i\theta} \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$$dz=dx+i\,dy=d\ell\,\sigma\upsilon\nu\theta+i\,d\ell\,\eta\mu\theta=d\ell\, e^{i\theta} \quad (2)$$

Ἡ (1), λόγω τῆς (2), γίνεται:

$$dF=i\cdot P\cdot dz \quad (3)$$

Ἐπειδή ἡ καμπύλη c παριστᾶ μίαν ρευματικήν γραμμήν, συμφώνως πρός τόν Νόμον τοῦ Bernoulli θά ἔχωμεν: $P=k-\frac{1}{2}\rho v^2$. Ἐξ ἄλλου βάσει τῶν τύπων (17), §1 θά ἔχωμεν: $v=\left|\frac{d\Omega}{dz}\right|$, ἐξ ἧς $\frac{d\Omega}{dz}=v e^{-i\theta}$.

Ὅθεν, ἡ ὁλική δύναμις $F=X+iY$ ἡ ἐπιδρῶσα ἐπί τῆς καμπύλης Γ θά δίδεται, λόγω τῆς (3), ὑπό τοῦ ὁλοκληρώματος:

$$F=X+iY=\oint_c iP\,dz=i\oint_c\left(k-\frac{1}{2}\rho v^2\right)d\sigma=-\frac{1}{2}i\rho\oint_c v^2dz=-\frac{1}{2}i\rho\oint_c v^2e^{i\theta}d\ell=-\frac{1}{2}i\rho\oint_c(v^2e^{2i\theta})(e^{-i\theta}d\ell) \quad (4)$$

ή $\quad \bar{F} = X - iY = \frac{1}{2}\cdot i\cdot \rho \oint_c (\upsilon^2 e^{2i\theta})(e^{i\theta} d\ell) = \frac{1}{2} i \cdot \rho \cdot \oint_c \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 \cdot dz \quad . \quad (5)$

2ον/ Θεωροῦμεν ὡς θετικὴν ροπὴν αὐτὴν ποὺ ἡ ἐπιδρῶσα δύναμις στρέφει τὸ σύστημα κατὰ τὴν φορὰν τὴν ἀντίθετον πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Ἡ ροπὴ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς δυνάμεως τῆς ἐπιδρώσης ἐπὶ τοῦ στοιχείου ds θὰ εἶναι:

$$dM = (P d\ell \eta\mu\theta) y + (P d\ell \sigma\upsilon\nu\theta) x = P(y dy + x dx)$$

διότι $d\ell \sigma\upsilon\nu\theta = dy$, $d\ell \eta\mu\theta = dx$.

Ἡ ὁλικὴ ροπὴ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν θὰ εἶναι:

$$M = \oint_c P\,(y dy + x dx) \qquad (6)$$

Ἐκ τοῦ Νόμου τοῦ Bernoulli εἶναι $P = k - \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ (6) γίνεται·

$$M = \oint_c (k - \frac{1}{2}\rho\upsilon^2)\cdot(y dy + x dx) = k\oint_c (y dy + x dx) - \frac{1}{2}\rho\oint_c V^2 (y dy + x dx)$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\rho\oint_c \upsilon^2 (x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta)\, d\ell,$$

καθ' ὅτι $\oint_c (y dy + x dx) = 0$, ἐπειδὴ τὸ $y dy + x dx$ εἶναι τέλειον διαφορικόν. Ὅθεν:

$$M = -\frac{1}{2}\rho\oint_c \upsilon^2 (x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta)\, d\ell = Re\left\{-\frac{1}{2}\rho\cdot\oint_c \upsilon^2\cdot(x+iy)(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta)\, d\ell\right\}$$

$$= Re\left\{-\frac{1}{2}\rho\oint_c \upsilon^2 z\cdot e^{-i\theta} d\ell\right\} = Re\left\{-\frac{1}{2}\rho\oint_c z(\upsilon^2 e^{-2i\theta})\cdot(e^{i\theta} d\ell)\right\} = Re\left\{-\frac{1}{2}\rho\oint_c z\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz\right\}$$

<u>Παρατήρησις</u>: Συχνὰ γράφομεν αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$M + iN = -\frac{1}{2}\rho\oint_c z\cdot\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz$, ὅπου τὸ N δὲν ἔχει ἁπλῆν φυσικὴν ἑρμηνείαν.

<u>Ἐφαρμογή</u>: Νὰ διερευνηθῇ ἡ κίνησις τοῦ ρευστοῦ ἔχοντος μιγαδικὸν δυναμικόν:

$$\Omega(z) = \upsilon_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi}\log z$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐπιδρῶσα ἐπὶ ἑνὸς κυλινδρικοῦ ἀντικειμένου τοποθετουμένου ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων τοῦ κυλίνδρου νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ροῆς.

Λυσις: Ἔστω $z = r\cdot e^{i\theta}$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\Omega(z) = \phi + i\,\Psi = U_o\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} + i\left\{U_o\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\eta\mu\theta + \frac{\gamma}{2\pi}\log r\right\} \quad (1)$$

Ὅθεν, αἱ ἰσοδυναμικαί γραμμαί καθώς καί αἱ ρευματικαί γραμμαί θά εἶναι ἀντιστοίχως:

$$U_o\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} = a \quad (2), \quad U_o\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\eta\mu\theta + \frac{\gamma}{2\pi}\log r = b \quad (3)$$

Τά σημεῖα ἀκινησίας τῆς ροῆς ἀντιστοιχοῦν, ὅταν

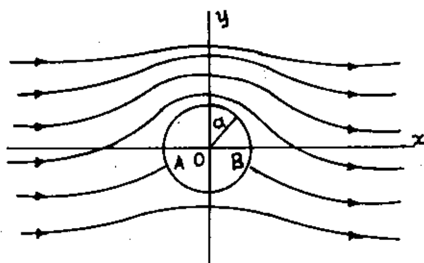
$$\Omega'(z) = 0, \text{ δηλ. ὅταν } U_o\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi z} = 0 \quad \text{ἤ}$$

$$z = \frac{-i\gamma}{4\pi V_o} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\gamma^2}{16\pi^2 V_o^2}}$$

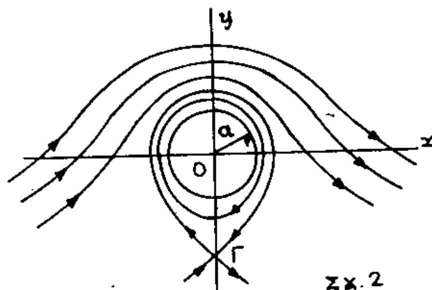
καί εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $\gamma = 4\pi a V_o$, ὑπάρχει ἕνα μόνον σημεῖον.

Ἐπειδή λόγῳ τῆς (3) ἡ $r = a$ (δηλ. ἡ περιφέρεια) εἶναι μία ρευματική γραμμή ἀντιστοιχοῦσα εἰς τό $b = \frac{\gamma}{2\pi}\log a$, ἡ ροή δύναται νά θεωρηθῆ ὡς γινομένη πέριξ ἑνός κυλινδρικοῦ ἀντικειμένου (βλ. σχ. 1) (Ροή πέριξ κυκλικοῦ κυλίνδρου). Θά εἶναι δέ ἡ ταχύτης τῆς ροῆς διά τά σημεῖα τά εὑρισκόμενα εἰς μεγάλην ἀπόστασιν $\lim_{|z|\to\infty}\Omega'(z) = U_o$, δηλ. σταθερά.

Ἡ μορφή τῆς ροῆς ἀλλάσσει, ἐξαρτωμένη ἑκάστοτε ἀπό τήν τιμήν τοῦ γ. Εἰς τά Σχ. 1 καί 2 δεικνύομεν δύο δυνατούς τρόπους ροῆς. Τό Σχ. 1 ἀντιστοιχεῖ ὅταν $\gamma < 4\pi a U_o$ καί τά σημεῖα ἀκινησίας τῆς ροῆς εἶναι Α καί Β. Τό Σχ. 2 ἀντιστοιχεῖ, ὅταν $\gamma > 4\pi a U_o$ καί ὑπάρχει ἕνα μόνον σημεῖον ἀκινησίας τῆς ροῆς τό Γ.



Σχ. 1



Σχ. 2

Ἡ δύναμις ἡ ἐπιδρῶσα ἐπί τοῦ κυλινδρικοῦ ἀντικειμένου, συμφώνως πρός τόν τύπον τοῦ Blasius, θά δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\bar{F} = X - iY = \frac{1}{2}\,i\rho\oint_c\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{2}\,i\rho\oint_c\left\{U_o\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi z}\right\}^2 dz = \frac{1}{2}\,i\rho\oint_c\left\{U_o^2\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)^2 + \frac{2iU_o\gamma}{2\pi z}\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2}\right\}dz$$

$$= -\rho U_o \gamma.$$

§ 3. ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

I. Ἠλεκτρικόν πεδίον. Ὑπό τόν ὅρον ***ἠλεκτρικόν πεδίον*** ἐννοοῦμεν ἕνα διανυσματικόν πεδίον τό ὁποῖον εἰς οἱονδήποτε σημεῖον του μᾶς δίδει τήν ἐπιδρῶσαν δύναμιν ἐπί τοῦ μοναδιαίου θετικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου τοῦ φερομένου εἰς τό σημεῖον αὐτό.

Προφανῶς ἡ δημιουργία ἠλεκτρικοῦ πεδίου ὀφείλεται εἰς τήν ὕπαρξιν ἠλεκτρικοῦ φορτίου.

Τό ἠλεκτρικόν πεδίον θά καλεῖται ***ἠλεκτροστατικόν***, ἐάν ἡ ἐπιδρῶσα δύναμις ἐπί τοῦ φερομένου μοναδιαίου ἠλεκτρικοῦ φορτίου εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Τό ἠλεκτρικόν πεδίον θά καλῆται ***παραλλήλου ἐπιπέδου***, ἐάν αὐτό εἶναι τό ἴδιο δι' ὅλα τά ἐπίπεδα τά παράλληλα πρός ἕνα δοθέν ἐπίπεδον Π καί δέν ἔχῃ συνιστώσας καθέτους πρός τό Π. Εἰς τήν τελευταίαν αὐτήν περίπτωσιν δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν ὅτι τό Π εἶναι τό ἐπίπεδον oxy.

Θεωροῦμεν τό μοναδιαῖον θετικόν ἠλεκτρικόν φορτίον τοποθετούμενον εἰς ἕνα τυχόν σημεῖον Α ἑνός ἠλεκτροστατικοῦ καί παραλλήλου ἐπιπέδου ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπ' αὐτοῦ τοῦ φορτίου καλεῖται ***ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου*** εἰς τό σημεῖον Α. Ἡ ἔντασις εἶναι μία διανυσματική συνάρτησις δύο μεταβλητῶν (ἐπίπεδον oxy) καί συμβολίζεται διά τοῦ συμβόλου $\mathcal{E}(x,y)$. Εἰς τό μιγαδικόν ἐπίπεδον δυνάμεθα ὡς ἐκ τούτου νά γράψωμεν:

$$\mathcal{E}(x,y) = E_x(x,y) + i\,E_y(x,y) \qquad (1)$$

ὅπου $E_x(x,y)$ εἶναι ἡ x-συνιστῶσα τοῦ πεδίου καί ἡ $E_y(x,y)$ εἶναι ἡ y-συνιστῶσα τοῦ πεδίου.

Ὑπάρχει πάντοτε μία πραγματική συνάρτησις $\phi(x,y)$ καλουμένη ***ἠλεκτροστατικόν δυναμικόν*** τοιαύτη, ὥστε:

$$\mathcal{E}(x,y) = -\text{grad}\ \phi(x,y) = -\nabla\phi \qquad (2)$$

Ἡ (1), λόγω τῆς (2), γράφεται:

$$\mathcal{E}(x,y) = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (3)$$

ὅπου
$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (4)$$

Τό πρόβλημα τῆς ἠλεκτροστατικῆς συνίσταται εἰς τό νά προσδιορίσωμεν

τὸ στατικὸν ἠλεκτρικὸν πεδίον παραγόμενον εἰς ἕνα μέσον ὑπὸ μιᾶς δοθείσης κατανομῆς τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου. Πρὸς τούτοις εἰς τὰ διάφορα προβλήματα τοῦ ἠλεκτρισμοῦ μᾶς δίδεται, εἴτε ἡ πυκνότης κατανομῆς τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου ὡς μία συνάρτησις τῶν συντεταγμένων $\rho(x,y)$, εἴτε τοῦ ὁλικοῦ φορτίου κατανεμημένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας θεωρουμένης ὡς ἰδανικοῦ ἠλεκτρικοῦ ἀγωγοῦ.
Αἱ βασικαὶ ἐξισώσεις αἱ διέπουσαι τὴν ἔντασιν ἑνὸς ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ Maxwell, ἤτοι:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 4\pi\rho \qquad (6)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου τὸ ὁποῖον παράγει τὸ δοθὲν ἠλεκτρικὸν πεδίον.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell γράφονται καὶ ὑπὸ τὴν κάτωθι μορφήν:

$$\nabla \times \mathcal{E} = 0 \qquad (5')$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -4\pi\rho \qquad (6')$$

II. Μιγαδικὸν ἠλεκτροστατικὸν δυναμικόν.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6′) προκύπτει ὅτι εἰς ἕνα πεδίον κενοῦ φορτίου $\rho=0$ τὸ ἠλεκτροστατικὸν δυναμικόν, δηλ. ἡ συνάρτησις $\Phi(x,y)$, εἶναι ἁρμονική.

Εἶναι λοιπὸν δυνατὸν εἰς αὐτὸ τὸ πεδίον νὰ κατασκευάσωμεν μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z, ἤτοι τὴν συνάρτησιν:

$$\Omega(z) = \Psi(x,y) + i\,\Phi(x,y) \qquad (7)$$

ὅπου ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $\Psi(x,y)$ εἶναι ἡ συζυγὴς ἁρμονικὴ τῆς $\Phi(x,y)$.
Ἡ συνάρτησις $\Omega(z)$ καλεῖται ***μιγαδικὸν ἠλεκτροστατικὸν δυναμικὸν*** καὶ παίζει σπουδαιότατον ρόλον εἰς τὸν Στατικὸν ἠλεκτρισμόν.

Ἐφ᾽ ὅσον ἡ $\Psi(x,y)$ εἶναι συζυγὴς ἁρμονικὴ τῆς $\Phi(x,y)$, αὗται αἱ συναρτήσεις θὰ πληροῦν τὰς συνθήκας τῶν Cauchy-Riemann, ἤτοι:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad (8)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3), (8) καὶ (7) λαμβάνομεν:

$$\mathcal{E}(x,y) = E_x + i E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = -i\,\overline{\Omega'(z)} \quad (9)$$

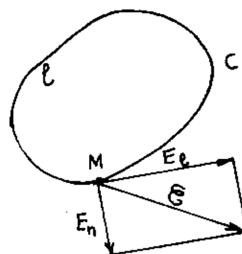
Ὅθεν, τό μέτρον E τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\mathcal{E}(x,y)$ θά εἶναι:

$$E = |\mathcal{E}(x,y)| = |-i\,\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)| \quad (10)$$

Αἱ ἐπίπεδοι καμπύλαι $\Phi(x,y) = a$ – αὐταί εἰς τόν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων παριστοῦν κυλινδρικάς ἐπιφανείας – καλοῦνται ***ἰσοδυναμικαί γραμμαί*** τοῦ δοθέντος πεδίου. Ἐνῶ αἱ καμπύλαι $\Psi(x,y) = b$ καλοῦνται ***γραμμαί δυνάμεως*** τοῦ πεδίου.

Ὅπως ἐδείχθη καί εἰς τήν § 1, αἱ δύο οἰκογένειαι τέμνονται ὀρθογωνίως.

III. Θεώρημα τοῦ Gauss. Ἔστω ὅτι τό φορτίον τό π... ...ον τό ἠλεκτρικόν πεδίον εἶναι συγκεντρωμένον εἰς κάποιο πεδίον τό ὁποῖο. ...ράσσεται ὑπό μιᾶς κλειστῆς καμπύλης C_o.[1] Ἤδη θεωροῦμεν μίαν κλειστήν καμπύλην C περικλείουσα τήν C_o (βλ. Σχ. 1) καί ἔστω $\mathcal{E}$ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τό σημεῖον M τῆς καμπύλης. Ἀναλύομεν τό διάνυσμα $\mathcal{E}$ εἰς δύο συνιστώσας E_ℓ καί E_n ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι ἐφαπτομενική καί ἡ ἄλλη κάθετος ἐπί τήν C εἰς τό M. Τό θεώρημα τοῦ Gauss ἔχει ὡς ἀκολούθως:



Σχ. 1

Θεώρημα XII-3-1. Ἐάν E_n εἶναι ἡ κάθετος συνιστῶσα τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί q εἶναι τό ἠλεκτρικόν φορτίον πού ἐγκλείεται ὑπό τῆς C (δηλ. τό q εἶναι φορτίον πού εἶναι κατανεμημένον ἐπί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ χώρου μέ μοναδιαῖον ὕψος) τότε θά ἔχωμεν:

$$\oint_C E_n \, d\ell = 4\pi q \quad (12)$$

Ἡ ἔκφρασις $\oint_C E_n \, d\ell$ καλεῖται ***ροή*** (ἠλεκτρική) διά μέσου τῆς C, ἐνῶ ἡ ἔκφρασις $\oint_C E_\ell \, d\ell$ καλεῖται ***κυκλοφορία*** διά μέσου τῆς C.

---

1) *Αὐτό σημαίνει ὅτι εἰς τόν χῶρον τά φορτία εἶναι κατανεμημένα ἐντός ἑνός ἀπείρου κυλίνδρου καί τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι τομαί τῶν περιγραμμάτων εἶναι παράλληλοι μετατοπίσεις τῆς C_o. Ἡ πυκνότης κατανομῆς τῶν φορτίων δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν συντεταγμένην z κατά μῆκος τῆς γεννετείρας τοῦ κυλίνδρου, ἀλλά εἶναι μόνον μία συνάρτησις τῶν x, y ἐντός τῆς καθέτου τομῆς.*

Ἡ ἔντασις $\mathcal{E}$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀναλύεται ὡς κάτωθι:

$$\mathcal{E} = E_\ell \cdot \boldsymbol{\tau} + E_n \cdot \boldsymbol{\eta} \qquad (13)$$

ὅπου $\boldsymbol{\tau}$ καὶ $\boldsymbol{\eta}$ τὸ μοναδιαῖον ἐφαπτομενικὸν καὶ κάθετον διάνυσμα τῆς καμπύλης ἀντιστοίχως.

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (13) ἐσωτερικῶς ἐπὶ $\boldsymbol{\tau}$ λαμβάνομεν:

$$E_\ell = \mathcal{E} \cdot \boldsymbol{\tau} \qquad (14)$$

Ἐπειδὴ $\mathcal{E} = (E_x, E_y)$ καὶ $\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{dx}{d\ell}, \frac{dy}{d\ell}\right)$ ἡ (14) δίδει:

$$E_\ell = E_x \cdot \frac{dx}{d\ell} + E_y \cdot \frac{dy}{d\ell} \qquad (15)$$

Ὁμοίως πολλαπλασιάζοντες τὴν (13) ἐσωτερικῶς ἐπὶ $\boldsymbol{\eta}$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\boldsymbol{\eta} = \frac{dy}{d\ell} - i\,\frac{dx}{d\ell}$ λαμβάνομεν:

$$E_n = \mathcal{E} \cdot \eta = E_x \cdot \frac{dy}{d\ell} - E_y \cdot \frac{dx}{d\ell} \qquad (16)$$

Ἐὰν ἡ καμπύλη δὲν ἐγκλείει ἠλεκτρικὸν φορτίον, τότε βάσει τοῦ τύπου (12) τοῦ Gauss θὰ ἔχωμεν:

$$\oint_c E_n \, d\ell = 0 \qquad \text{ἤ}$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (8) ἔχομεν:

$$\oint_c \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dy}{d\ell} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\ell} \right\} d\ell = 2\pi q \qquad \text{ἤ}$$

$$\oint_c \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dy = 4\pi q \qquad (17)$$

Ἐὰν ἡ καμπύλη δὲν ἐγκλείει ἠλεκτρικὸν φορτίον, δηλ. $q = 0$, τότε ὁ (17) γίνεται:

$$\oint_c \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dy = 0 \qquad (18)$$

ἤτοι: <u>ἡ ροὴ διὰ μέσου τῆς</u> C <u>θὰ εἶναι τότε ἴση πρὸς μηδέν.</u>

Τέλος ἡ κυκλοφορία διὰ μέσου τῆς C βάσει τοῦ τύπου (15) θὰ εἶναι:

$$\oint_c E_\ell \, d\ell = -\oint_c \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\ell} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\ell} \right\} d\ell = -\oint_c \frac{\partial \Phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy \qquad \text{ἤ}$$

$$\oint_c E_\ell \, d\ell = -\oint_c d\Phi = 0 \qquad (19)$$

ἤτοι: <u>ἡ κυκλοφορία ἑνὸς ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου διὰ μέσου κάθε κλει-</u>

της καμπύλης είναι ίση πρός μηδέν.

Ἐπειδή $\Omega'(z)=\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\frac{\partial\phi}{\partial x}$ θά ἔχωμεν:

$$\oint_c \Omega'(z)dz = \oint_c \left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\}(dx+idy)$$

$$= \oint_c \frac{\partial\psi}{\partial x}dx-\frac{\partial\phi}{\partial x}dy+i\oint_c\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial x}dy$$

$$= \oint_c E_n dl+i\oint_c E_\ell dl = 2\pi q+0=4\pi\cdot q$$

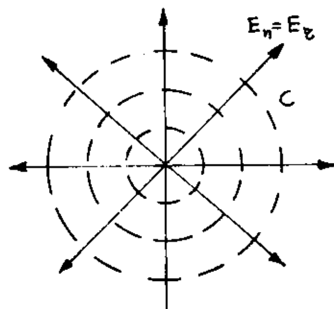
ἤτοι:

$$\oint_c \Omega'(z)dz=4\pi q \qquad (20)$$

III. Μιγαδικόν δυναμικόν ὀφειλόμενον εἰς ἠλεκ. φορτίου.

Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖα γραμμήν φορτισμένην μέ ἠλεκτρικόν φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους καί ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τό z-ἐπίπεδον εἰς τό σημεῖον $z=0$.

Τό ἠλεκτρικόν πεδίον τό ὀφειλόμενον εἰς τό φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους εἶναι ἀκτινωτόν (βλ. Σχ. 2) καί ἡ κάθετος συνιστῶσα τοῦ ἠλεκτρικοῦ διανυσματικοῦ πεδίου εἶναι σταθερά καί ἴση πρός E_τ ἐπί ἑκάστης περιφερείας $(0,\tau)$, ἡ δέ ἐφαπτομενική συνιστῶσα εἶναι μηδέν. Ἐάν



Σχ. 2.

C εἶναι ἕνας τυχών κύλινδρος (κυκλικός) ἀκτῖνος τ μέ ἄξονα διερχόμενον ἀπό τό σημεῖον $z=0$, τότε, συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ Gauss θά ἔχωμεν:

$$\oint_c E_n dl = E_\tau\oint_c dl = E_\tau\cdot 2\pi\tau=4\pi q.$$

Ὅθεν,

$$E_\tau=\frac{2q}{\tau}$$

Ἐπειδή $E_\tau=-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$ θά ἔχωμεν $\psi=-2q\log\tau$, ὅπου παραλείψαμεν τήν σταθεράν τῆς ὁλοκληρώσεως. Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ψ εἶναι τό πραγματικόν μέρος τῆς συναρτήσεως $\Omega(z)=-2q\log z$, ἡ ὁποία εἶναι τό μιγαδικόν δυναμικόν τοῦ πεδίου. Ἐάν ἡ φορτισμένη εὐθεία γραμμή διέρχεται διά τοῦ σημείου $z=a$, τότε τό δημιουργούμενον ὑπό αὐτῆς μιγαδικόν δυναμικόν θά εἶναι:

$$\boxed{\Omega(z)=-2q\log(z-a)} \qquad (21)$$

Τό μιγαδικόν δυναμικόν θά παριστᾶ μίαν πηγήν ἤ ἕνα φρέαρ, ἐάν τό $q<0$ ἤ $q>0$ ἀντιστοίχως.

Ἐφαρμογές 1η/ Θεωροῦμεν τό μιγαδικόν δυναμικόν:

$$\Omega(z)=az \quad (a>0)$$

Τοῦτο ὁρίζει εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ἕνα ἠλεκτρικόν πεδίον. Εἶναι $\Omega'(z)=a$. Τό ἠλεκτροστατικόν δυναμικόν θά δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$\mathcal{E}(x,y)=E_x+iE_y=-i\overline{\Omega'(z)} \quad \text{ἤ} \quad E_x+i\cdot E_y=-i\cdot a$$

Ὅθεν:

$$E_x=0, \quad E_y=-a$$

Εἶναι δέ:

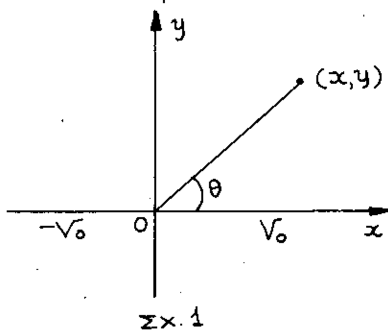
$$\Omega(z)=a(x+iy)=ax+iay.$$

Συνεπῶς, λόγω τῆς σχέσεως (7), θά ἔχωμεν:

$$\Psi=ax \quad \text{καί} \quad \Phi=ay.$$

Αἱ ἰσοδυναμικαί γραμμαί εἶναι αἱ $ay=σταθ$ ἤ $y=σταθ$, δηλ. εὐθεῖαι παράλληλοι πρός τόν ἄξονα ox, ἐνῶ αἱ γραμμαί δυνάμεως εἶναι αἱ $ax=σταθ.$ ἤ $x=σταθ$, δηλ. εὐθεῖαι παράλληλοι πρός τόν ἄξονα oy.

2α/ Νά εὑρεθῆ τό δυναμικόν εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου τοῦ δεικνυομένου εἰς τό Σχ. 1, ἐάν τά δυναμικά ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι ἀντιστοίχως V_0 διά $x>0$ καί $-V_0$ διά $x<0$. Ἐν συνεχεία προσδιορίσατε τάς ἰσοδυναμικάς γραμμάς καθώς καί τάς δυναμικάς γραμμάς.



Σχ. 1

Λύσις: Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν μίαν ἁρμονικήν συνάρτησιν εἰς τό μιγαδικόν ἐπίπεδον, ἡ ὁποία νά λαμβάνη τάς τιμάς V_0 διά $x>0$ καί $-V_0$ διά $x<0$. Πρός τούτοις θά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον τοῦ Poisson, ὅτε θά ἔχωμεν:

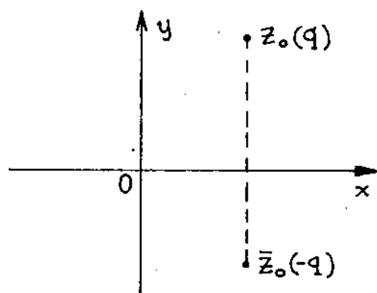
$$\Psi(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{-V_0\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{V_0\,d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}=\frac{2V_0}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{d\eta}{y^2+(x-\eta)^2}=V_0\left(1-\frac{2}{\pi}\,\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x}\right).$$

Αἱ ἰσοδυναμικαί γραμμαί εἶναι $V_0\left(1-\frac{2}{\pi}\,\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x}\right)=a$, δηλ. $y=mx$, ὅπου m

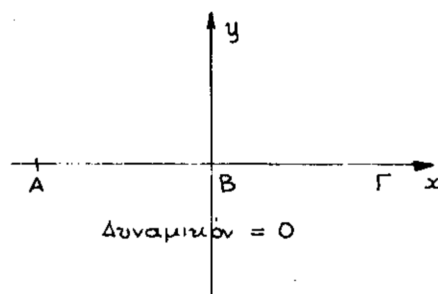
σταθερά. Αὗται εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διά τῆς ἀρχῆς. Αἱ δέ γραμμαί δυνάμεως εἶναι αἱ $x^2+y^2=\beta$, δηλ. ὁμόκεντροι περιφέρειαι καί αἱ ὁποῖαι τέμνουν τό δίκτυον τῶν ἰσοδυναμικῶν γραμμῶν ὀρθογωνίως.

3ο/ Νά εὑρεθῆ τό δυναμικόν τό ὀφειλόμενον εἰς ἕνα γραμμικόν φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους εἰς τό σημεῖον $z=z_0$ καί εἰς τό γραμμικόν φορτίον $-q$ ἀνά μονάδα μήκους εἰς τό σημεῖον $z=\bar{z}_0$. Ἐν συνεχείᾳ νά προσδιορισθῆ τό δυναμικόν ἐπί τοῦ ἀπείρου ἐπιπέδου ΑΒΓ (βλ. Σχ. 2) καθέτου πρός τό z-ἐπίπεδον καί διερχόμενον διά τοῦ ἄξονος ox.

<u>Λύσις</u>: Τό μιγαδικόν δυναμικόν τό ὀφειλόμενον εἰς αὐτά τά δύο γραμμικά φορτία q καί $-q$ ἀνά μονάδα μήκους τά εὑρισκόμενα εἰς τά σημεῖα z_0 καί $\bar{z}_0$ εἶναι:



Σχ. 1



Σχ. 2

$$\Omega(z) = -2q\log(z-z_0) + 2q\log(z-\bar{z}_0) = 2q\log\left(\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}\right) \qquad (1)$$

Ὅθεν, τό ζητούμενον δυναμικόν θά εἶναι:

$$\psi(x,y) = 2q\,\mathrm{Re}\left\{\log\left(\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}\right)\right\} \qquad (2)$$

Διά νά ἀποδείξωμεν τό δεύτερον ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι εἶναι $\psi=0$ ἐπί τοῦ ἄξονος ox, δηλ. τό ΑΒΓ (βλ. Σχ. 2) ἔχει δυναμικόν μηδέν. Θέτοντες εἰς τήν σχέσιν (1) $z=x$ λαμβάνομεν:

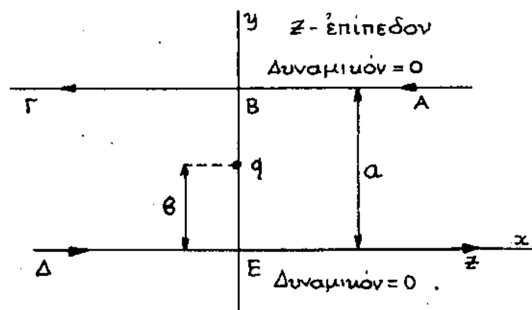
$$\Omega = 2q\log\left(\frac{x-\bar{z}_0}{x-z}\right) \text{ καί } \bar{\Omega} = 2q\log\left(\frac{x-z_0}{x-\bar{z}_0}\right) = -\Omega,$$

ἤτοι: $\bar{\Omega} + \Omega = 0$ ἤ $\psi - i\phi + \psi + i\phi = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $\psi(x,y)=0$. Οὕτω δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν τό φορτίον $-q$ εἰς τό $\bar{z}_0$ ὑπό ἑνός ἐπι-

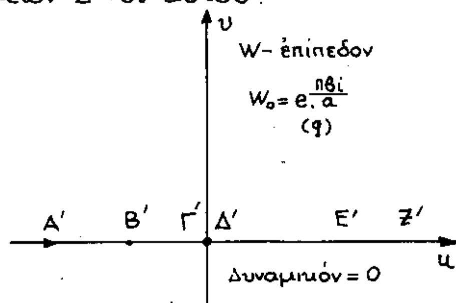
πέδου ΑΒΓ ἔχοντος δυναμικόν μηδέν (βλ. Σχ.2) καί ἀντιστρόφως ἐάν τό δυναμικόν ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι μηδέν, τότε τοῦτο δύναται νά θεωρηθῆ ὡς προερχόμενον ἀπό τά φορτία q εἰς τό z_0 καί $-q$ εἰς τό $\bar{z}_0$.

4ον/ Δύο ἄπειρα παράλληλα ἐπίπεδα εὑρίσκονται εἰς μίαν ἀπόστασιν a μεταξύ των καί ἔχουν δυναμικόν μηδέν. Ἕνα γραμμικόν φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους τοποθετεῖται μεταξύ αὐτῶν τῶν ἐπιπέδων καί εἰς ἀπόστασιν b ἀπό τό ἕνα ἐξ αὐτῶν. Νά προσδιορισθῆ τό δυναμικόν εἰς κάθε σημεῖον εὑρισκόμενον μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Λύσις: Ἔστω ΑΒΓ καί ΔΕΖ (βλ.Σχ.1) παριστοῦν τά δύο παράλληλα ἐπίπεδα κάθετα πρός τό z- ἐπίπεδον καί ὑποθέτομεν ὅτι τό γραμμικόν φορτίον διέρχεται ἀπό τόν φανταστικόν ἄξονα ἀπό τό σημεῖον $z=bi$ αὐτοῦ.



Σχ.1



Σχ.2

Ἐάν ἐκτελέσωμεν τόν μετασχηματισμόν $W=e^{\frac{\pi z}{a}}$, οὗτος ἀπεικονίζει τήν ἄπειρον λωρίδα ΑΒΓΔΕΖ τοῦ z-ἐπιπέδου (βλ. Σχ.1) εἰς τό $\Im m W \geq 0$ τοῦ W-ἐπιπέδου (βλ. Σχ.2), τό δέ γραμμικόν φορτίον q εἰς τό σημεῖον $z=bi$ ἀπεικονίζεται εἰς τό γραμμικόν φορτίον q εἰς τό σημεῖον $W=e^{\frac{\pi b i}{a}}$, τό δέ σύνορον ΑΒΓΔΕΖ τοῦ Σχ.1 (τό ὁποῖον ἔχει δυναμικόν μηδέν) ἀπεικονίζεται εἰς τόν u-ἄξονα Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ' τοῦ W-ἐπιπέδου (ὁ ὁποῖος ἔχει δυναμικόν μηδέν), ὅπου τά σημεῖα Γ' καί Δ' συμπίπτουν μέ τό $W=0$, (βλ. Σχ. 2). Ἐπειδή τό δυναμικόν ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν u εἶναι μηδέν, τό δυναμικόν εἰς τό W-ἐπίπεδον δύναται νά θεωρηθῆ ὡς προερχόμενον ἀπό τά φορτία q καί $-q$ τοποθετημένα εἰς τά σημεῖα W_0 καί $\bar{W}_0$ ἀντιστοίχως. Ὅθεν, διά τήν εὕρεσιν τῆς δυναμικῆς συναρτήσεως Ψ ἀρκεῖ νά ἐφαρμόσωμεν τόν τύπον (2) τῆς προηγουμένης ἐ-

φαρμογῆς, ὅτε θὰ ἔχωμεν:

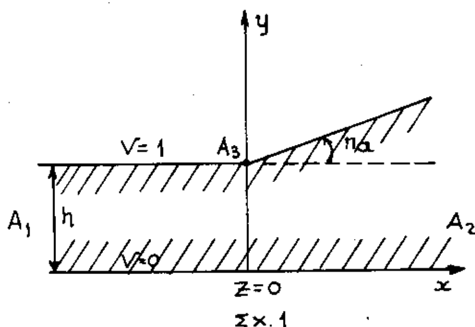
$$\psi(x,y) = 2q \ \mathrm{Re}\left\{\log\left(\frac{W - e^{-\frac{\pi\beta i}{a}}}{W - e^{\frac{\pi\beta i}{a}}}\right)\right\}.$$

Τότε τὸ δυναμικὸν εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου τοῦ z- ἐπιπέδου ποὺ περικλείεται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶναι:

$$\psi(x,y) = 2q \ \mathrm{Re}\left\{\log\left(\frac{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{-\frac{\pi\beta i}{a}}}{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{\frac{\pi\beta i}{a}}}\right)\right\}.$$

5ο Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ πεδίον τὸ δημιουργούμενον ὑπὸ ἑνὸς ἀπείρου δύο διαστάσεων πυκνωτοῦ,[1] τοῦ δεικνυομένου εἰς τὸ Σχ.1.

<u>Λύσις</u>: Κατ' ἀρχὰς προσδιορίζομεν τὴν συνάρτησιν $z = \varphi(W)$, ἡ ὁποία καθορίζει τὴν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ἄνω μέρους τοῦ W- ἐπιπέδου ($\mathrm{Im}W > 0$) ἐπὶ τοῦ γραμμοσκιασθέντος χωρίου τοῦ z- ἐπιπέδου.



Σχ.1

Ἐπειδὴ τὸ χωρίον εἶναι τὸ «τρίγωνον» $A_1 A_2 A_3$ μὲ κορυφὰς τὰ A_1 καὶ A_2 εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ ζητουμένη ἀπεικόνισις δύναται νὰ ἐπιτευχθῆ μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel (βλ. Κεφ.X, § 4). Οὕτω θέτομεν τὴν ἀκόλουθον ἀντιστοιχίαν τῶν σημείων τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος Ou τοῦ W- ἐπιπέδου καὶ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου $A_1A_2A_3$.

$$A_1 \longrightarrow W = 0$$
$$A_2 \longrightarrow W = \infty$$
$$A_3 \longrightarrow W = -1$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι, ἀντιστοίχως πρὸς τὰς γωνίας $\pi a_1 = 0$, $\pi a_2 = -\pi a$, $\pi a_3 = \pi(1+a)$, ἡ ζητουμένη ἀπεικόνισις θὰ εἶναι:

$$z = C \cdot \int_{W_0}^{W} \zeta^{-1} \cdot (1+\zeta)^{a} d\zeta + C_1 \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν σημείων A_3 ($z = ih$) καὶ $W = -1$ ἕπεται, ὅτι διὰ

[1] Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ πλάκαι τοῦ πυκνωτοῦ θεωροῦνται χωρὶς πάχος.

$W_0=-1$ λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου (1):

$$z = C\cdot\int_{-1}^{w} \zeta^{-1}\cdot(1+\zeta)^{a}\,d\zeta + ih \quad (2)$$

Διά τόν προσδιορισμόν τῆς σταθερᾶς C παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν διαγράψωμεν πέριξ τοῦ σημείου $w=0$ κατά τήν θετικήν φοράν είς τό ἄνω ἡμιεπίπεδον ἕνα ἡμικυκλικόν τόξον πολύ μικρᾶς ἀκτῖνος ρ, τότε ἀντιστοιχεῖ μία μετάβασις ἀπό τήν πλευράν A_2A_1 πρός τήν πλευράν A_1A_3. Οὕτω ἡ μεταβολή τοῦ z εἶναι:

$$\Delta z = ih$$

Ἐξ ἄλλου είς τόν τύπον (2) θέτοντες $\zeta = \rho\cdot e^{i\varphi}$ καί λαμβάνοντες τό ὅριον, καθώς τό $\rho\to 0$, λαμβάνομεν:

$$\Delta z = iC\lim_{\rho\to 0}\int_{0}^{\pi}(1+\rho e^{i\varphi})^{a}\,d\varphi = i\pi C$$

Ἐντεῦθεν $C=\frac{h}{\pi}$ καί ἡ τελική ἔκφρασις τοῦ ὁλοκληρώματος (2) θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$z=\frac{h}{\pi}\cdot\int_{-1}^{w}\zeta^{-1}(1+\zeta)^{a}d\zeta + ih \quad (3)$$

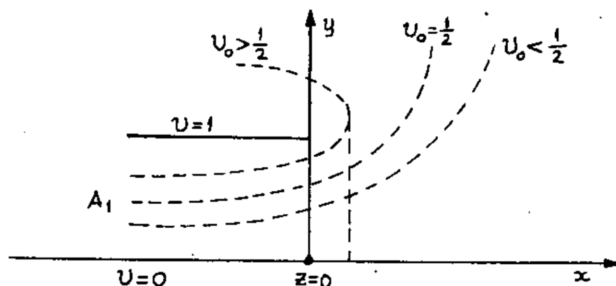
Ἡ συνάρτησις $\zeta=e^{\pi w}$ ὁρίζει μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τῆς λωρίδος $0<\Im m\, w<1$ τοῦ W-ἐπιπέδου ἐπί τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου τοῦ z-ἐπιπέδου. Ὅθεν, ἡ συνάρτησις:

$$z=\frac{h}{\pi}\cdot\int_{-1}^{e^{\pi w}}\zeta^{-1}\cdot(1+\zeta)^{a}\,d\zeta \qquad (4)$$

ὁρίζει μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τῆς λωρίδος $0<\Im m\, w<1$ τοῦ W-ἐπιπέδου ἐπί τοῦ γραμμοσκιασθέντος χωρίου τοῦ z-ἐπιπέδου. Εἰς τήν πορείαν ἡ εὐθεῖα γραμμή $\Im m\, w=0$ ἀπεικονίζεται εἰς τό κάτω τμῆμα τοῦ πυκνωτοῦ A_1A_2 καί ἡ εὐθεῖα γραμμή $\Im m\, w=1$ ἀπεικονίζεται εἰς τό ἄνω τμῆμα τοῦ πυκνωτοῦ, τό ὁποῖον εἶναι ἡ πολυγωνική γραμμή $A_2A_3A_1$. Ἐκ τῆς σχέσεως (4) διά $v=\Im m\, w=$ σταθ. λαμβάνομεν τάς παραμετρικάς ἐξισώσεις τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ δοθέντος ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου π.χ. εἰς τήν εἰδικήν

περίπτωσιν ὅπου $a=1$ τὸ ὁλοκλήρωμα (4) δύναται νὰ ὑπολογισθῇ μὲ τὴν βοήθειαν στοιχειωδῶν συναρτήσεων καὶ δίδει:

$$z=\frac{h}{\pi}\left(1+\pi w+e^{\pi w}\right)$$



Σχ. 3

Τότε αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῶν ἰσοδυναμικῶν γραμμῶν $\upsilon=\upsilon_o=$σταθ. $(0\leq\upsilon_o\leq 1)$ λαμβάνουν τὴν μορφήν:

$$x=\frac{h}{\pi}\left(1+\pi u+\sigma\upsilon\nu\,\pi\upsilon_o\cdot e^{\pi u}\right)$$

$$y=\frac{h}{\pi}\left(\pi\upsilon_o+\eta\mu\,\pi\upsilon_o\cdot e^{\pi u}\right)\qquad -\infty<u<+\infty$$

Εἰδικῶς, τῆς μέσης ἰσοδυναμικῆς γραμμῆς $(\upsilon_o=\frac{1}{2})$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς:

$$y=\frac{h}{2}+\frac{h}{\pi}\cdot e^{\frac{\pi}{h}\cdot x-1}$$

Ἰσοδυναμικαὶ γραμμαὶ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ υ δίδονται ὑπὸ τοῦ Σχ. 3.

<u>Παρατήρησις</u>. Γενικῶς ἡ μέθοδος τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν σχεδίασιν τῶν δύο διαστάσεων ἠλεκτροστατικῶν καὶ μαγνητοστατικῶν πεδίων.

§4. <u>ΜΕΤΑΔΟΣΙΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ</u>

Θεωροῦμεν ἕνα στερεὸν τὸ ὁποῖον ἔχει θερμοκρασίαν ἡ ὁποία μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου. Συχνάκις μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ ποσότης τῆς θερμότητος (εἰς μονάδας calories) τῆς διοχετευομένης ἀνὰ μονάδα ἐμβαδοῦ ($1\,cm^2$) καὶ ἀνὰ μονάδα χρόνου (1 sec) διὰ μέσου μιᾶς ἐπιφανείας τοποθετημένης ἐντὸς τοῦ στερεοῦ. Αὐτὴ ἡ ποσότης συγχρόνως καλεῖται ***μετάδοσις θερμότητος*** διὰ μέσου τῆς

ἐπιφανείας, συμβολίζεται διά τοῦ Q καί εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας $T(x,y,z)$ τῆς ἐπιφανείας. Δίδεται δέ αὕτη ὑπό τοῦ τύπου:

$$Q=-K \operatorname{grad} T \qquad (1)$$

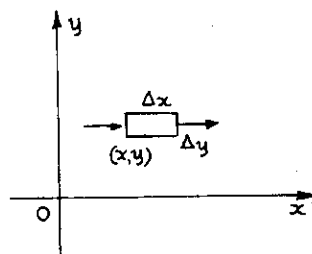
ὅπου K εἶναι μία σταθερά καί ἡ ὁποία καλεῖται συντελεστής θερμοαγωγιμότητος ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς ὕλης τοῦ στερεοῦ.

Ἐάν περιορίσωμεν τό πρόβλημά μας καί ἐδῶ εἰς τόν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων (μιγαδικόν ἐπίπεδον), τότε ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$Q=-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}+i\frac{\partial T}{\partial y}\right)=Q_x+i\,Q_y \qquad (2)$$

ὅπου $\qquad Q_x=-k\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\,,\quad Q=-k\frac{\partial T}{\partial y}\,.$

Θεωροῦμεν τώρα εἰς τό ἐσωτερικόν ἑνός στερεοῦ ἕνα στοιχεῖον ἔχον τό σχῆμα ἑνός ὀρθογωνίου πρίσματος μέ μοναδιαῖον ὕψος κάθετον εἰς τό ἐπίπεδον xy μέ βάσεις $\Delta x, \Delta y$ εἰς αὐτό τό ἐπίπεδον (βλ. Σχ. 1).



Σx. 1

Ἡ φορά τοῦ μέτρου τῆς μεταδόσεως τῆς θερμότητος πρός τά δεξιά διά μέσου τῆς ἀριστερᾶς ὄψεως τῆς πλευρᾶς εἶναι $-K\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\,\Delta y$ καί πρός τά δεξιά διά μέσου τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς εἶναι $-k\frac{\partial T(x+\Delta x,y)}{\partial x}\Delta y$.

Ἀφαιροῦντες τό πρῶτον μέτρον ἀπό τό δεύτερον εὑρίσκομεν τό μέτρον τῆς ἀπωλείας τῆς θερμότητος ἀπό τό στοιχεῖον διά μέσου τῶν δύο ὄψεων. Οὕτω

$$-K\,\frac{\partial T(x+\Delta x,y)}{\partial x}\,\Delta y-\left(-k\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\,\Delta y\right)=-K\,\left[\frac{T_x(x+\Delta x,y)-T_x(x,y)}{\Delta x}\right]\cdot\Delta x\Delta y$$

Παραλείποντες τά διαφορικά ἀνωτέρας τάξεως θεωροῦντες τά $\Delta x, \Delta y$ πολύ μικρά ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις γράφεται:

$$-k\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,\Delta x\Delta y \qquad (3)\,.$$

Κατά ἕναν ἀνάλογον τρόπον τό ποσόν τῆς θερμότητος πού ἀπόλλυται κατά τήν διέλευσιν τῆς θερμότητος ἐκ τῆς ἄνω πρός τήν κάτω ὄψιν τοῦ ὀρθογωνίου καί ἐκ τῆς κάτω ὄψεως πρός τά ἔξω θά εἶναι:

$$-K\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,\Delta x\Delta y \qquad (4)$$

θερμότητα ἐγκλείει ἢ ἐλευθερώνει τό στοιχεῖον μόνον διά μέσου αὐτῶν τῶν τεσσάρων ὄψεων καί ἡ θερμοκρασία ἐντός τοῦ στοιχείου εἶναι σταθερά.

Ἐντεῦθεν τό ἄθροισμα τῶν ἐκφράσεων (3) καί (4) πρέπει νά εἶναι μηδέν. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}=0 \qquad (5)$$

Οὕτω ἡ συνάρτησις $T(x,y)$ ἡ δίδουσα τήν θερμοκρασίαν τοῦ στερεοῦ πληροῖ τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace. Μέ ἄλλους λόγους ἡ συνάρτησις $T(x,y)$ εἶναι μία ἁρμονική συνάρτησις τῶν x καί y εἰς τό πεδίον πού παριστᾶ τήν τομήν τοῦ στερεοῦ σώματος ὑπό τοῦ ἐπιπέδου oxy.

Ἡ ἐξίσωσις $T(x,y)=C_1$, ὅπου C_1 πραγματική σταθερά, εἰς τόν χῶρον $oxyz$ παριστᾶ μίαν οἰκογένεια κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***ἰσόθερμοι ἐπιφάνειαι***, ἐνῶ εἰς τό ἐπίπεδον oxy παριστᾶ μίαν οἰκογένειαν καμπύλων, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***ἰσόθερμοι γραμμαί***.

Ἔστω $\psi(x,y)$ ἡ συζυγής ἁρμονική τῆς συναρτήσεως $T(x,y)$. Θεωροῦμεν ἤδη τήν μιγαδικήν συνάρτησιν:

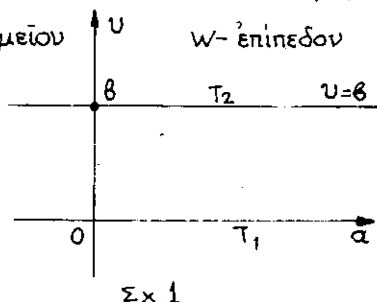
$$\Omega(z)=T(x,y)+i\psi(x,y) \qquad (6)$$

ἡ ὁποία καλεῖται ***μιγαδική θερμοκρασία***.

Ἡ δέ καμπύλη $\psi(x,y)=C_2$, ὅπου C_2 πραγματική σταθερά καλεῖται ***γραμμή ροῆς***.

Μία ἐνδιαφέρουσα ἁπλῆ περίπτωσις πού θά χρησιμοποιεῖται εἰς τάς ἐφαρμογάς εἶναι ἡ τῆς εὑρέσεως τῆς θερμοκρασίας εἰς κάθε σημεῖον περιεχόμενον μεταξύ δύο παραλλήλων πλακῶν ἐχουσῶν σταθεράς θερμοκρασίας T_1 καί T_2 ($T_2>T_1$) (βλ. Σχ. 1). Θά ἔχωμεν εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ὅτι:

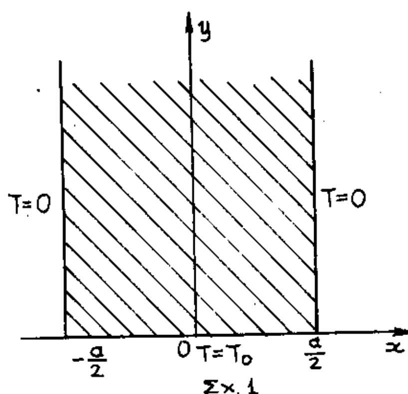
$$T(v)=T_1+\frac{1}{\beta}(T_2-T_1)$$



Σχ. 1

<u>Ἐφαρμογή</u>: Νά εὑρεθῆ ἡ κατανομή τῆς θερμοκρασίας εἰς τήν ἡμι-λωρίδα ἀπείρου μήκους τήν δεικνυομένην εἰς τό Σχ. 1 τῆς ὁποίας τό πλάτος

εἶναι a καί τῆς ὁποίας αἱ πλευραί ἔχουν θερμοκρασίαν T=0, ἐνῷ ὁ πυθμήν αὐτῆς ἔχει θερμοκρασίαν T_0.



Σχ. 1

<u>Λύσις</u>: Δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ 1ου παραδείγματος τῆς §4 τοῦ X Κεφαλαίου εὐκόλως διαπιστοῦται, ὅτι ὁ μετασχηματισμός πού ἀπεικονίζει τήν ἀνωτέρω λωρίδα εἰς τό ἄνω μέρος τοῦ W-ἐπιπέδου ($\Im m\, W>0$) εἶναι ὁ $W=\text{ημ}\,\frac{\pi z}{a}$ μέ τάς πλευράς τῆς πλάκας ἀπεικονιζομένας εἰς τά διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[-1,1]$, $[1,\infty)$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος.

Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τήν θερμοκρασίαν ἐπί τοῦ W-ἐπιπέδου γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος u ἔχομεν τάς κάτωθι τιμάς: Διά $u<-1$ εἶναι $T=0$, διά $-1\le u\le +1$ εἶναι $T=T_0$ καί διά $u>1$ εἶναι $T=0$. Πρός τούτοις θά ἐφαρμόσωμεν τό Θεώρημα XI-2-2, ὅτε ἔχομεν:

$$T=\frac{T_0}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v}{(\xi-u)^2+v^2}\,d\xi=\frac{T_0}{\pi}\left(\text{τοξεφ}\,\frac{1-u}{v}-\text{τοξεφ}\,\frac{-1-u}{v}\right)$$

$$=\frac{T_0}{\pi}\left(\text{τοξσφ}\,\frac{u-1}{v}-\text{τοξσφ}\,\frac{u+1}{v}\right)=\frac{T_0}{\pi}\,\text{τοξεφ}\,\frac{W-1}{W+1}=\frac{2T_0}{\pi}\,\text{τοξ.εφ}\,\frac{\text{συν}\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}.$$

<u>Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις</u>:

I. <u>Ἐπί τῆς ροῆς τῶν ρευστῶν</u>.

1. α) Νά εὑρεθῆ τό μιγαδικόν δυναμικόν διά ἕνα ρευστόν κινούμενον μέ μίαν σταθεράν ταχύτητα V_0 κατά μίαν διεύθυνσιν, ἡ ὁποία σχηματίζει μίαν γωνίαν ω μέ τόν δεξιόν ἄξονα τῶν x.

   β) Νά προσδιορισθῆ τό δυναμικόν τῆς ταχύτητος καθώς καί ἡ συνάρτησις ρεύματος.

   γ) Νά προσδιορισθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ρευματικῶν καί ἰσοδυναμικῶν γραμμῶν.

2. Νά διερευνηθῆ ἡ κίνησις ἑνός ρευστοῦ ἔχοντος μιγαδικόν δυναμικόν $\Omega(z)=iK\log z$, ὅπου $k>0$.

3. Ἀναλύσατε τὴν ροήν, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ κάτωθι μιγαδικοῦ δυναμικοῦ δηλ. σχεδιάσατε τὴν ταχύτητα τοῦ πεδίου τὰς ἰσοδυναμικὰς καὶ ρευματικὰς γραμμὰς τὰς πηγάς, τοὺς στροβίλους κ.τ.λ.

i) $\Omega(z)=\log(z^2-a^2)$ $(a>0)$ ii) $\Omega(z)=\log\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}$ $(a>0)$

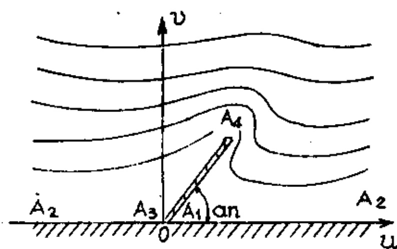
iii) $\Omega(z)=\log\left(1+\frac{1}{z^2}\right)$ iv) $\Omega(z)=az+\frac{k}{2\pi i}\log z$ $(a>0,\ k>0)$.

4. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπεικόνισις:

$$W=(z-1)^a\cdot\left(1+\frac{az}{1-a}\right)^{1-a}$$

ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\mathcal{I}m\, z>0$ ἐπὶ τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου $\mathcal{I}m\, W>0$, ἐφ' ὅσον ἀποκόψωμεν ἐκ τοῦ W ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα 0 καὶ $e^{ia\pi}$ (βλ. Σχ. 1).

Διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ ἀνωτέρω ἀποτελέσματος νὰ εὑρεθῇ ἡ ροὴ τοῦ ρευστοῦ ἐντὸς μιᾶς ἀπείρως βαθειᾶς δεξαμενῆς ἐχούσης τὸ ἔναντι σχῆμα, ὅπου συγχρόνως τὸ τμῆμα A_3A_4 παριστᾷ τὸ ἀντικείμενον μήκους h.



Σχ. 1

5. <u>Ροὴ πέριξ μιᾶς γωνίας</u>

Ὅταν τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν εἶναι ἡ συνάρτησις:

$$\Omega(z)=Az \quad (1), \qquad (z=x+iy)$$

ὅπου A πραγματικὴ σταθερά, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\Phi(x,y)=AX,\quad \Psi(x,y)=Ay$$

Αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ $\Psi(x,y)=C$ εἶναι αἱ ὁριζόντιοι γραμμαὶ $y=\frac{C}{A}$, ἐνῶ ἡ ταχύτης εἰς κάθε σημεῖον εἶναι $V=\overline{\Omega'(z)}=A$.

Ἐδῶ ἕνα σημεῖον (x_0,y_0) μὲ $\psi(x,y)=0$ εἶναι κάθε σημεῖον τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τῶν x.

Ἐὰν τὸ σημεῖον (x_0,y_0) ληφθῇ ὡς ἀρχή, τότε ἡ $\Psi(x,y)$ παριστᾷ τὴν μορφὴν τῆς ροῆς μέσῳ κάποιας καμπύλης χαρασσομένης ἀπὸ τὴν ἀρχὴν πρὸς τὸ σημεῖον (x,y) (βλ. Σχ. 2). Ἡ ροὴ εἶναι ὁμαλὴ πρὸς τὰ δεξιά.

Αὐτὴ δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἡ ὁμαλὴ ροὴ εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἡμιεπιπέδου φρασσομένου ὑπὸ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τῶν x ἢ ὡς ἡ ὁμαλὴ ροὴ μεταξὺ δύο παραλλήλων γραμμῶν $y=y_1$ καὶ $y=y_2$.

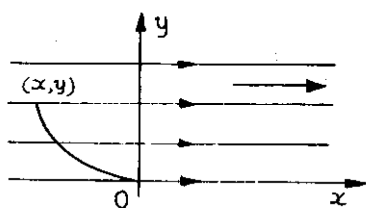
Ἤδη ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ροὴν ἐντὸς τοῦ τεταρτημορίου $u\geq 0$, $v\geq 0$. Πρὸς τούτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς $z=W^2$ ἀπεικονίζει αὐτὸ τὸ τεταρτημόριον ἐντὸς τοῦ ἄνω μέρους τοῦ ἐπιπέδου xy, τὸ δὲ σύνορον αὐτοῦ τοῦ τεταρτημορίου ἐφ' ὁλοκλήρου τοῦ ἄξονος τῶν x. Ἐπειδὴ $y=2uv$ ἡ ρευματικὴ συνάρτησις $\psi(x,y)=Ay$ διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ρευματικὴν συνάρτησιν $\psi(u,v)=2Auv$ διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς τοῦ ἄνω τεταρτημορίου. Αὐτὴ ἡ συνάρτησις δύναται νὰ εἶναι ἁρμονικὴ καὶ μηδενίζεται ἐπὶ τοῦ συνόρου του. Αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ εἰς τὸ θεωρηθὲν τεταρτημόριον εἶναι κλάδος ὑπερβολῶν (βλ. Σχ.3), ἤτοι: $2Auv=c$.

Τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν εἶναι ἡ συνάρτησις $\Omega(W)=AW^2$ καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ εἶναι:

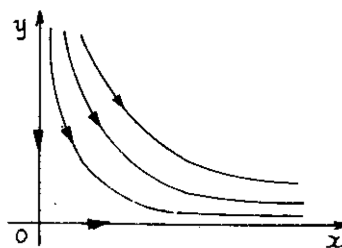
$$V=\overline{\Omega'(W)}=2A(u-iv),$$

Τὸ δὲ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι:

$$|V|=2A\sqrt{u^2+v^2}$$



Σx.2

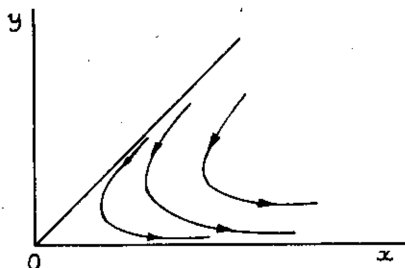


Σx.3

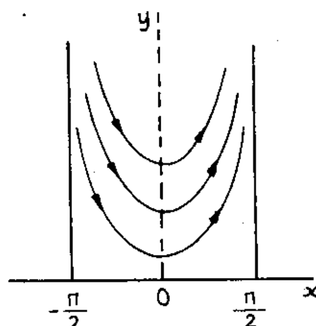
6. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν τῆς ροῆς πέριξ ἑνὸς κυλίνδρου $r=r_0$, ὅταν ἡ ταχύτης V τείνῃ πρὸς μίαν πραγματικὴν σταθερὰν καθὼς τὸ σημεῖον ἀπομακρύνεται τοῦ κυλίνδρου.

7. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ρευματικὴ συνάρτησις $\psi(r,\theta)=Ar^4\eta\mu 4\theta$ διὰ μίαν ροὴν ἐντὸς

τοῦ γωνιακοῦ τομέως $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ καὶ ἀκολούθως νὰ χαραχθοῦν μία ἢ δύο ρευματικαὶ γραμμαὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ τοῦ χωρίου (βλ. Σχ. 4).



Σχ. 4

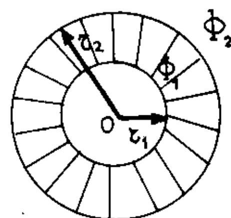


Σχ. 5

8. Θεωροῦμεν μίαν ροὴν πραγματοποιουμένην ἐντὸς τοῦ ἡμι-απείρου χωρίου $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y \geq 0$ (βλ. Σχ. 5). Δείξατε ὅτι τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν αὐτῆς τῆς ροῆς εἶναι $\Omega(z) = A\eta\mu z$. Ἀκολούθως εὕρατε τὰς ἐξισώσεις τῶν ρευματικῶν γραμμῶν.

II. <u>Ἐπὶ τοῦ στατικοῦ ἠλεκτρισμοῦ</u>

9. Ἕνα χωρίον φράσσεται ὑπὸ δύο ἀπείρου μήκους ὁμοκέντρων κυλινδρικῶν πυκνωτῶν, ἀκτίνων r_1 καὶ r_2 $(r_2 > r_1)$, οἱ ὁποῖοι εἶναι φορτισμένοι μὲ δυναμικὰ Φ_1 καὶ Φ_2 ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθοῦν: α) Τὸ δυναμικόν β) Ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου.
<u>Ὑπόδ:</u> Ἡ δυναμικὴ συνάρτησις θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\Phi = A\log r + B$, ὅπου A καὶ B σταθεραὶ προσδιορισθησόμεναι ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace κ.τ.λ. (βλ. Σχ. 6).

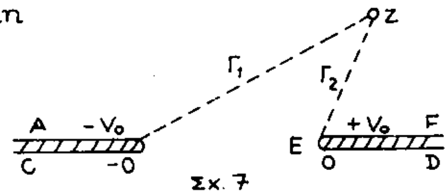


Σχ. 6

10. Δείξατε ὅτι τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου τοῦ παραγομένου ὑπὸ δύο συσσωρευτῶν ὡς δεικνυομένων εἰς τὸ Σχ. 7 συνιστωμένων ὑπὸ δύο συνεπιπέδων πλακῶν εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν 2α καὶ

ἐχουσῶν ἡ μία δυναμικόν V καί ἡ ἄλλη δυναμικόν $-V$ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου :

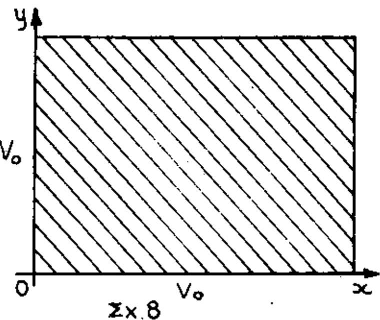
$$\Omega(z)=\frac{2V}{\pi}\log(z+\sqrt{z^2-a^2})$$



Σx. 7

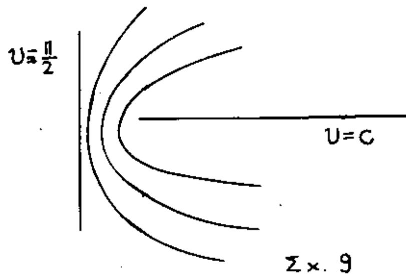
11. Νά εὑρεθῆ : α) Τό δυναμικόν, β) Τό ἠλεκτρικόν πεδίον παντοῦ εἰς τό γραμμοσκιασθέν χωρίον τοῦ Σx.8, ἐάν τό δυναμικόν ἐπί τῶν θετικῶν ἡμιαξόνων x καί y εἶναι ἀντιστοίχως V_0 καί $-V_0$.

(Ἀπάντ: $V_0\left\{1-\frac{2}{\pi}\text{τοξ εφ}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)\right\}$).

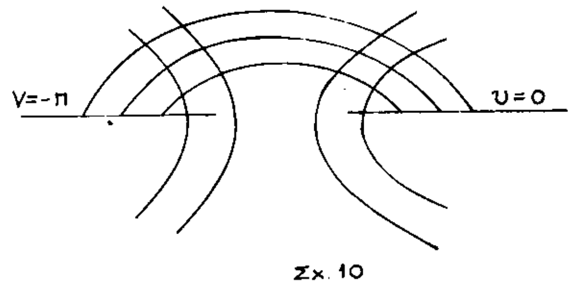


Σx.8

12. Νά εὑρεθῆ τό ἠλεκτροστατικόν δυναμικόν μεταξύ δύο ἡμι-ἀπείρων καθέτων πλακῶν χωριζομένων ὑπό ἑνός ἀνοίγματος ὡς δεικνύει τό Σx. 9.



Σx. 9

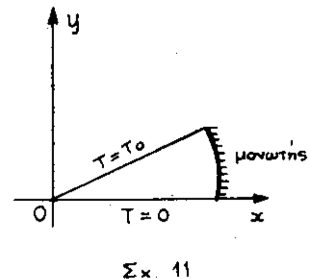


Σx. 10

13. Νά εὑρεθῆ τό ἠλεκτροστατικόν δυναμικόν δύο ἡμι-ἀπείρων συνεπιπέδων συσσωρευτῶν, οἱ ὁποῖοι εὑρίσκονται εἰς μίαν ἀπόστασιν μεταξύ των ὡς δεικνύει τό Σx. 10.

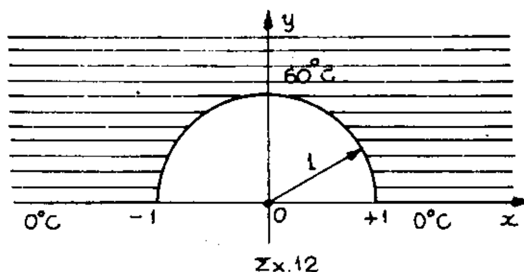
III. Ἐπί τῆς θερμότητος :

14. Διά ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ $W=\log z$ νά εὑρεθῆ ἡ κατανομή τῆς θερμοκρασίας εἰς τόν κυκλικόν τομέαν πού δεικνύεται εἰς τό ἔναντι Σχῆμα 11. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἰσόθερμοι γραμμαί τῆς ροῆς καί νά χαραχθῆ μία ἐξ αὐτῶν.



Σx. 11

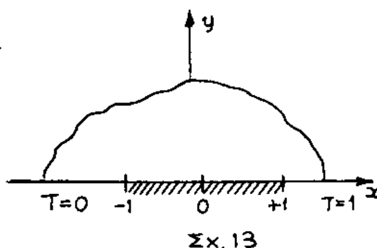
15. Νά εὑρεθῆ ἡ μόνιμος κατάστασις τῆς θερμοκρασίας εἰς κάθε σημεῖον τοῦ γραμμοσκιασθέντος χωρίου τοῦ Σχ. 12, ἐάν ἡ θερμοκρασία ἐπί τῆς περιφερείας τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι 60°C, ἐνῶ εἰς τά τμήματα $(-\infty,-1]$ καί $[1,+\infty)$ τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι 0°C.



Σχ. 12

Ὑπόδ: Χρησιμοποιήσατε τόν μετασχηματισμόν $w=z+\frac{1}{z}$ καί ἐν συνεχεία ἐφαρμόσατε τό θεώρημα τοῦ Diriclet διά τήν εὕρεσιν τῆς συναρτήσεως $T(x,y)$.

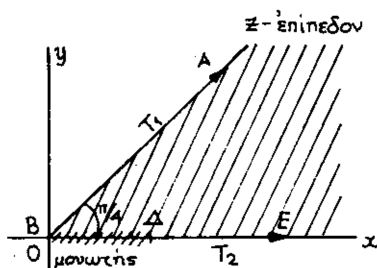
16. Νά εὑρεθοῦν οἱ φραγμένες μόνιμες θερμοκρασίες $T(x,y)$ εἰς ἕνα ἡμι-ἄπειρον στερεόν $y\geq 0$, ἐάν $T=0$ εἰς τό τμῆμα $x<-1$, $y=0$ τοῦ συνόρου, ἐάν $T=1$ εἰς τό τμῆμα $x>1$, $y=0$ καί ἐάν τό τμῆμα $-1<x<1$, $y=0$ τοῦ συνόρου εἶναι μονωμένο.



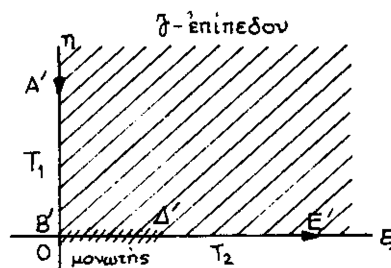
Σχ. 13

(Ἀπάντ: $T(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$ τοξημ $\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2+y^2}-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right]$, $-\frac{\pi}{2}\leq$ τοξημ$t\leq\frac{\pi}{2}$).

17. Μία ἄπειρος σφῆνα τῆς ὁποίας ἡ τομή παρίσταται ὑπό τοῦ γραμμοσκιασθέντος χωρίου ΑΒΔΕ,



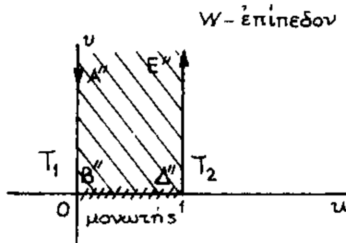
Σχ. 14 (α)



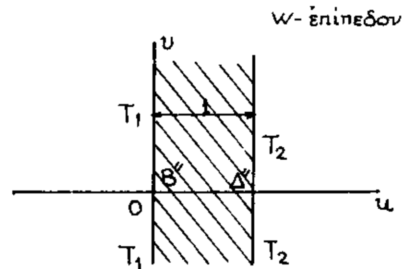
Σχ. 14 (β)

γωνίας $\frac{\pi}{4}$ (βλ. Σχ. 14 (α)) ἔχει μίαν τῶν πλευρῶν της (ΑΒ) διατηροῦσα σταθεράν θερμοκρασίαν T_1. Ἡ ἄλλη πλευρά ΒΔΕ ἔχει τό τμῆμα ΒΔ

(μοναδιαίου μήκους) εἰς μόνωσιν, τό δέ ὑπόλοιπον τμῆμα ΔΕ διατηρόν σταθεράν θερμοκρασίαν T_2. Νά εὑρεθῆ ἡ θερμοκρασία εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου.



Σχ. 14(γ)



Σχ. 14(δ)

<u>Λύσις</u>: Διά ἐκτελέσεως τοῦ μετασχηματισμοῦ $\zeta = z^2$ τό γραμμοσκιασθέν χωρίον τοῦ z-ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 14(α)) ἀπεικονίζεται ἐντός τοῦ γραμμοσκιασθέντος χωρίου τοῦ ζ-ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 14(β)), ὅπου ἡ πλευρά AB ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ ἄξονος η, ἡ δέ BE ἐπί τοῦ ἄξονος ξ τοῦ ζ-ἐπιπέδου. Ἀκολούθως ἐκτελοῦντες τόν μετασχηματισμόν $\zeta = \eta\mu\left(\frac{\pi W}{2}\right)$ τό γραμμοσκιασθέν χωρίον τοῦ ζ-ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται εἰς τό γραμμοσκιασθέν χωρίον τοῦ W-ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 14(γ)), τά δέ σύνορα τῶν ἀνωτέρω χωρίων ἀπεικονίζονται ὅπως δεικνύεται εἰς τά ἀνωτέρω σχήματα.

Ἤδη τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς θερμοκρασίας εἰς τό χωρίον τό δεικνύμενον ὑπό τοῦ Σχ. 14(γ) μέ τήν πλευράν B″Δ″ εὑρισκομένην εἰς μόνωσιν ἰσοδυναμεῖ μέ τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς θερμοκρασίας εἰς τό χωρίον τό δεικνυόμενον ὑπό τοῦ Σχ. 14(δ), ἐπειδή λόγω τῆς συμμετρίας δέν δύναται νά μεταφερθῆ θερμότης διά μέσου τῆς πλευρᾶς B″Δ″. Οὕτω ἔχομεν ἀναχθῆ εἰς τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς θερμοκρασίας μεταξύ δύο παραλλήλων πλακῶν εὑρισκομένων εἰς σταθεράν ἀπόστασιν μεταξύ των καί ἐχουσῶν θερμοκρασίας T_1 καί T_2. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν ἡ μεταβολή τῆς θερμοκρασίας εἶναι γραμμική καί δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως: $T = T_1 + (T_2 - T_1)\,u$.

Ἀπό τούς τύπους τῶν μετασχηματισμῶν $\zeta = u^2$ καί $\zeta = \eta\mu\left(\frac{\pi W}{2}\right)$ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ ζ εὑρίσκομεν $W = \frac{2}{\pi}\,\tau o\xi\eta\mu\, z^2$ ἤ $u = \frac{2}{\pi}\cdot Re\left\{\tau o\xi\eta\mu\, z^2\right\}$.

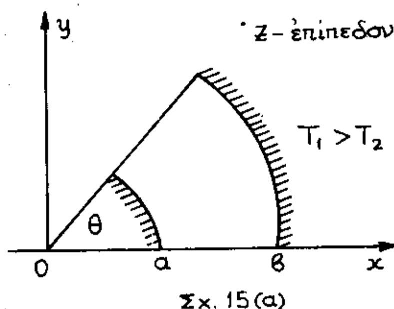
Οὕτω ἡ ζητουμένη θερμοκρασία εἶναι:

$$T(x,y) = T_1 + \frac{2\cdot(T_2-T_1)}{\pi} \, Re\left\{ \text{τοξημ}\, z^2 \right\}$$

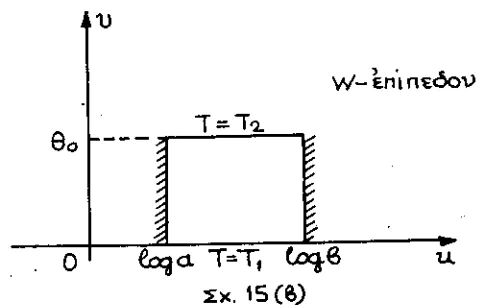
Ἐάν δέ λάβωμεν πολικάς συντεταγμένας θά ἔχωμεν:

$$T(r,\theta) = T_1 + \frac{2(T_2-T_1)}{\pi} \, \text{τοξημ} \left\{ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{r^4+2r^2\text{συν}2\theta+1} - \frac{1}{2}\sqrt{r^4-2r^2\text{συν}2\theta+1} \right\}.$$

8. Νά εὑρεθῇ ἡ κατανομή τῆς θερμοκρασίας $T(x,y)$ ἐντός τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ δεικνυομένου εἰς τό Σχ. 15(α), τό ὁποῖον εἶναι μονωμένον ἐπί τῶν δύο κυκλικῶν του τόξων ἀκτίνων α καί β, ἐνῶ ἐπί τῆς πλευρᾶς του τῆς κειμένης ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει σταθεράν θερμοκρασίαν T_1, ἐπί δέ τῆς ἄλλης του πλευράς του ἔχει σταθεράν θερμοκρασίαν T_2.



Σx. 15(α)



Σx. 15(β)

Ὑπόδ: Ἐκτελέσατε τόν μετασχηματισμόν $W = \log z$, ὁπότε τό δοθέν χωρίον μετασχηματίζεται εἰς τό χωρίον τό δεικνυόμενον ὑπό τοῦ Σx. 15(β). κ.τ.λ.

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1. AHLFORS, L. : Complex Analysis. Mc Graw-Hill, N. York, 1966
2. BASS, J. : Cours de Mathématiques. Tome I-II, Masson,Paris,1968
3. CARSLAW,H-JAEGER,J. : Operational Methods in Applied Mathematics, Dover, 1963
4. CHURCHILL,R.-BROWN,J.-VERHEY,R. : Complex Variables and Applications, Mc Graw-Hill, N.York-London,1974
5. DETTMAN, J. : Applied Complex Variables, MacMillan Company,1969
6. KAPLAN,W. : Advanced Calculus, Addison-Wesley, 1959
7. ΚΑΠΠΟΥ, Δ. : Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων, Αθήνα, 1963
8. KRZYZ, J. : Problems in Complex Variable Theory. American Elsevier, N. York, 1971
9. LEPACE, W. : Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. Mc Graw-Hill, 1961.
10. PHILLIPS, E. : Some Topics in Comlex Analysis. Pergamon Press, 1966
11. PIPES,L.-HARVILL,L. : Applied Mathematics for Engineers and Physisists. Mc Graw-Hill, London, 1970
12. PISOT,Ch.-ZAMANSKY,M. : Mathématiques Générales. Tome 5,Dunod, Paris
13. SAKS,S.-ZYGMUND,A. : Analytic Functions, Elsevier Publishing Company, 1971
14. SANSONE,G.-GERRETSEN,J. : Lectures on the theory of Functions of a complex variable. Tome I-II, Wolters - Noordhoff, 1969
15. SILVERMAM,R. : Complex Analysis with Applications, Prentice--Hall, 1974
16. SPIEGEL,M. : Complex Variables, Mc Graw-Hill
17. SVESHNIKOV,A.-TIKHONOV,A. : The theory of Functions of a Complex Variable. MIR Publishers, Moscow, 1973
18. VOLKOVSKY,G.-ARAMANOVICH,I. : Problems in the theory of Functions of Complex Variable. MIR Publishers, Moscow, 1972

* * *